

I NUMERI PRIMI DI PADRE MERSENNE

*di Giancarlo Travaglini**

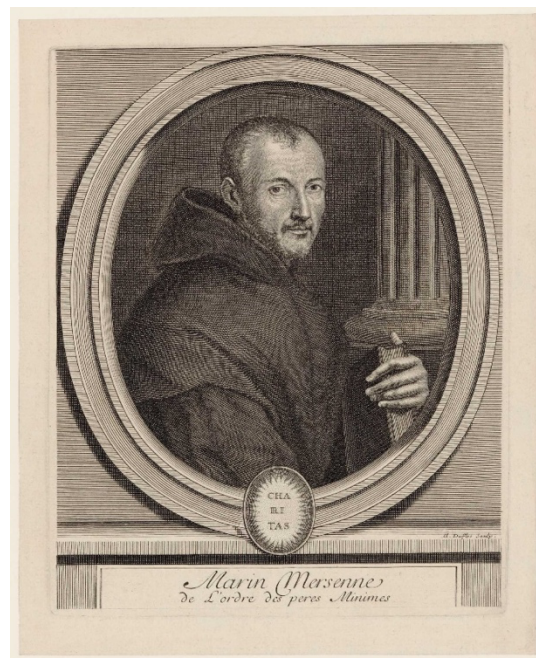
** Dipartimento di Matematica
e Applicazioni, Università di
Milano - Bicocca*

Negli ultimi decenni sono spesso apparse notizie sulla scoperta di numeri primi con milioni di cifre. Possiamo chiederci - e se non lo facciamo noi, potrebbero domandarcelo i nostri studenti - di cosa si tratti e perché non sia insensato studiare questi problemi.

Nella prima metà del XVII secolo una cella di un convento di Parigi era diventata il punto di incontro per le ricerche scientifiche dell'epoca. In quella cella viveva padre Marin Mersenne, un frate Minimo, definito dallo storico medievalista Jean-Barth Barthélémy Hauréau [8, p.177] «il segretario dell'Europa colta».

Marin Mersenne

Marin Mersenne nacque nel 1588 a Oize, un piccolo comune nell'antica provincia del Maine, nel nord-ovest della Francia (nell'attuale regione dei Paesi della Loira). Dall'età di sedici anni fu educato alla scuola dei Gesuiti di La Fleche. Tra il 1609 e il 1611 studiò alla Sorbona e al College Royal, e conobbe l'Ordine dei Minimi, del quale entrò a far parte nel 1611, professando i voti nel 1612 e diventando sacerdote nel 1613. Nel 1619 si trasferì al Convento di Place Royale a Parigi, dove rimase fino alla sua morte, avvenuta nel 1648. L'Ordine dei Minimi è un istituto religioso sorto nel XV secolo per opera di San Francesco di Paola, caratterizzato dall'estrema umiltà, dalla sottomissione a Dio e dal porsi all'ultimo posto (il “minimo”) nella scala sociale e nella Chiesa (cfr. il sito dell'Ordine [11]).



Mersenne sfruttò la matematica e la fisica per difendere puntigliosamente la scienza e il cristianesimo contro varie forme di superstizione e pseudoscienza, quali l'astrologia, l'alchimia e la cabala. Col tempo, però, la matematica assunse per lui un'importanza sempre maggiore. In [13], leggiamo infatti:

Inoltre, sebbene l'“apologetica scientifica” di Mersenne fosse concepita primariamente come una difesa della religione ... essa si rivelò essere anche una difesa delle scienze matematiche contro chiunque pensasse che fossero una vana curiosità e che dovessero essere rifiutate o, quantomeno, relativizzate come conoscenza non essenziale ... Questo è particolarmente evidente nelle opere più tarde, in cui Mersenne diede libero sfogo alla sua passione per le scienze matematiche. Sebbene la teologia naturale e la polemica anti-deistica non fossero più i temi dominanti, egli continuò a rivendicare l'“utilità” della matematica, non solo per il miglioramento pratico della vita umana, ma anche per le sue virtù edificanti.

Mersenne intrattenne contatti diretti e una fitta corrispondenza con i principali filosofi e scienziati dell'epoca, tra cui Descartes, Fermat, Pascal e Galileo (si veda [2, p.384]). La sua attività si svolse nella prima metà del XVII secolo, quando ancora non esistevano riviste scientifiche (le prime furono il *Journal des Sçavans*, pubblicato a Parigi, e le *Philosophical Transactions*, pubblicato a Londra, entrambe nel 1665, [1]). In [9, p.114], G. Lombardo scrive:

L'umile figlio di San Francesco di Paola svolse il ruolo di “segretario dell'Europa colta” attraverso due canali:

1. Mediante la fitta corrispondenza che intrattenne con personalità di rilievo ... In queste lettere che rappresentano un documento importantissimo per lo studio del dibattito scientifico e colto nella prima metà del Seicento, egli descrive esperimenti, informa i suoi interlocutori sulle recenti scoperte, si confronta sulla risoluzione di problemi a carattere matematico, offrendo un “servizio d'informazione” preziosissimo.
2. Con la fondazione nel 1635 dell'Accademia Parisiensis, una sorta di cenacolo di intellettuali che si riuniva stabilmente per discutere problemi di natura filosofica, teologica e scientifica.

È significativo anche il passaggio che segue, tratto dal libro di Carl Boyer [2, p. 385]:

Se Mersenne fosse vissuto un secolo prima, forse non si sarebbe verificato quel ritardo nella diffusione delle conoscenze riguardanti la soluzione dell'equazione di terzo grado: infatti, quando Mersenne veniva a conoscenza di qualcosa, subito ne veniva informata l'intera “Repubblica delle Lettere”. A partire dal XVII secolo, pertanto, la matematica si sviluppò più per una sua logica interna che non in seguito alle sollecitazioni di forze economiche, sociali o tecnologiche, come risulta particolarmente evidente nell'opera di Descartes, il più famoso matematico di quel periodo.



Conversazione tra Desargues, Descartes, Mersenne e Pascal nel 1643, sotto le arcate di Place Royale. Si tratta di un affresco del pittore Théobald Chartran, parte di un ciclo decorativo realizzato per lo Scalone d'Onore della Sorbona a Parigi.

Cfr. [9, 12, 13] per ulteriori informazioni sulla vita e sull'opera di Mersenne.

Tuttavia Mersenne non fu solo un segretario (sia pure dell'Europa colta). È considerato il fondatore dell'acustica moderna [7], studiò le proprietà del pendolo contemporaneamente e indipendentemente da Galileo [14], e influenzò direttamente Huygens nell'invenzione dell'orologio a pendolo [4]. Il suo nome è però oggi legato soprattutto ai *numeri primi di Mersenne*, che sono l'oggetto di questa nota.

I numeri perfetti e i numeri di Mersenne

Il numero 6 è uguale alla somma dei suoi divisori propri (cioè escluso 6 stesso):

$$6 = 1 + 2 + 3 ,$$

e sono numerose le testimonianze (Cfr. [3, cap.1]) che mostrano l'interesse degli antichi per i numeri che hanno questa proprietà.

Definizione 1 *Un numero intero positivo n è detto perfetto se è uguale alla somma dei suoi divisori propri.*

Anche 28 è un numero perfetto. Infatti:

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 .$$

Nella tabella seguente ad ogni intero positivo $n \leq 30$ abbiamo associato la somma dei suoi divisori positivi propri. La quarta colonna ($\sigma(n)$ = somma di tutti i divisori positivi) è ottenuta aggiungendo n , e la funzione $\sigma(n)$ ci servirà più avanti.

n	divisori propri	somma dei divisori propri	$\sigma(n)$ = somma di tutti i divisori positivi
1	nessuno	0	1
2	1	1	3
3	1	1	4
4	1, 2	3	7
5	1	1	6
6	1, 2, 3	6	12
7	1	1	8
8	1, 2, 4	7	15
9	1, 3	4	13
10	1, 2, 5	8	18
11	1	1	12
12	1, 2, 3, 4, 6	16	28
13	1	1	14
14	1, 2, 7	10	24
15	1, 3, 5	9	24
16	1, 2, 4, 8	15	31
17	1	1	18
18	1, 2, 3, 6, 9	21	39
19	1	1	20
20	1, 2, 4, 5, 10	22	42
21	1, 3, 7	11	32
22	1, 2, 11	14	36
23	1	1	24
24	1, 2, 3, 4, 6, 8, 12	36	60
25	1, 5	6	31
26	1, 2, 13	16	42
27	1, 3, 9	13	40
28	1, 2, 4, 7, 14	28	56
29	1	1	30
30	1, 2, 3, 5, 6, 10, 15	42	72

Somma dei divisori positivi di ciascun numero positivo ≤ 30 .

I numeri perfetti però sembrano essere pochi. Dopo 28, vengono

$$496, \quad 8128, \quad 33550336, \quad \dots$$

Ne conosciamo una cinquantina, ma non sappiamo se ne esistano infiniti. Inoltre non sappiamo se esistano numeri perfetti dispari.

Un importante contributo allo studio dei numeri perfetti è dovuto a Euclide, che nella Proposizione 36 del IX libro degli Elementi, dimostrò che

Se $2^p - 1$ è primo, allora il numero $2^{p-1}(2^p - 1)$ è perfetto.

È interessante rileggere questo enunciato (cfr. [5, p.1225], o [6] per una versione liberamente accessibile degli Elementi in inglese) nella forma originale di Euclide, che non conosceva la moderna notazione algebrica.

Qualora da un'unità quanti si voglia numeri siano stati fissati di seguito in proporzione raddoppiata, fino a che il totale composto risulti primo, e il totale moltiplicato per l'ultimo faccia un certo numero, quello che risulta sarà perfetto.

Qualora da un'unità quanti si voglia numeri siano stati fissati di seguito in proporzione raddoppiata fino a che il totale composto risulti primo significa sommare $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{p-1}$ fino a ottenere un numero primo; *il totale moltiplicato per l'ultimo faccia un certo numero* significa moltiplicare $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{p-1}$ (che sappiamo¹ essere uguale a $2^p - 1$) per l'ultimo termine, cioè 2^{p-1} . Così si ottiene $2^{p-1}(2^p - 1)$.

Eulero ha dimostrato il viceversa. Abbiamo così il seguente

Teorema 2 (Euclide-Eulero) *I numeri pari perfetti sono tutti e soli quelli della forma*

$$2^{p-1}(2^p - 1)$$

con $2^p - 1$ primo².

¹Basta porre $x = 2$ nell'identità (valida per ogni intero $n \geq 0$ e ogni numero reale $x \neq 1$)

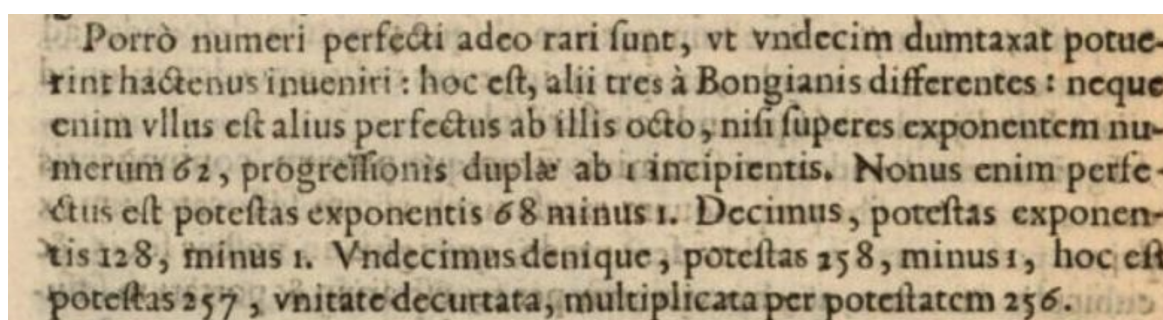
$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} . \quad (1)$$

²Se $2^p - 1$ è primo, allora anche p lo è. Infatti, se fosse $p = k\ell$ con $k > 1$ e $\ell > 1$ interi, avremmo

$$2^p - 1 = (2^k)^\ell - 1 = (2^k - 1) \sum_{j=0}^{\ell-1} 2^{kj} .$$

Nell'Appendice si trova la dimostrazione di questo teorema, che dovrebbe suscitare un certo interesse, poiché Euclide ed Eulero sono due delle figure più importanti e suggestive di tutta la storia della matematica, e sono separate da 2000 anni!

Il teorema di Euclide-Eulero è molto elegante, ma dice meno di quanto sembri. Il problema è che non sappiamo quali numeri della forma $2^p - 1$ siano primi. Abbiamo osservato che $2^p - 1$ è primo solo se p è primo, ma questa condizione non è sufficiente: ad esempio $2^5 - 1 = 31$ è primo, $2^7 - 1 = 127$ è primo, ma $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$ no. In realtà non sappiamo neppure se esistano infiniti numeri primi di questa forma, e quindi, come abbiamo già detto, non sappiamo se esistano infiniti numeri perfetti pari. I numeri primi della forma $2^p - 1$, con p primo, sono chiamati *numeri (primi) di Mersenne*. Il suo storico contributo è descritto in questo passaggio, tratto dalla sua opera [10, p.28]).



Inoltre, i numeri perfetti sono così rari che finora se ne sono potuti trovare solamente undici: vale a dire, altri tre differenti da quelli di Bongo [Pietro Bongo, matematico autore del Numerorum Mysteria]: e infatti non vi è alcun altro [numero] perfetto oltre a quegli otto, a meno che non si superi l'esponente numero 62, della progressione doppia che inizia da 1. Il nono [numero] perfetto, infatti, è la potenza di esponente 68 meno 1. Il decimo, la potenza di esponente 128 meno 1. L'undicesimo infine, la potenza 258 meno 1, ovvero sia la potenza 257 diminuita di un'unità, moltiplicata per la potenza 256.

Quindi Mersenne ha scritto che i primi undici numeri perfetti sono dati da $2^{p-1}(2^p - 1)$, con

$$p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257.$$

In realtà questa lista contiene alcuni errori: è sbagliato includere 67 e 257, ed è sbagliato escludere 61, 89 e 107, che danno luogo a numeri primi. Cfr. [3, p.IV].

Fino alla metà del XX secolo si conoscevano una dozzina di questi numeri, quindi pochi più di quelli individuati da Mersenne, tenendo conto dei suoi errori. Successivamente l'avvento dei calcolatori elettronici permise di trovarne altri, ed oggi ne sono noti 52. Cfr. <https://www.mersenne.org/primes/> per la lista completa (a settembre 2026). Il più grande, finora, è

$$2^{136279841} - 1$$

[illegible]

Il progetto GIMPS e la ricerca dei numeri primi di Mersenne

L'obiettivo del progetto GIMPS è trovare nuovi numeri primi di Mersenne.

Dato un numero della forma $2^p - 1$, con p primo, il **primo passo** consiste nel cercare eventuali divisori (piccoli) di $2^p - 1$. Se ne troviamo, allora $2^p - 1$ non è primo e passiamo a un altro numero. Se

invece questa prima ricerca non dà esito, allora $2^p - 1$ potrebbe essere primo e, come **secondo passo** gli applichiamo un test di primalità *probabilistico*, cioè un test che permette di stabilire se il numero che stiamo esaminando ha una “ragionevole probabilità” di essere primo. Dal 2018 il GIMPS (vedi <https://www.mersenne.org/various/math.php#prp>) usa il test di Fermat, basato sul Piccolo Teorema di Fermat.



Pierre de Fermat (1601 – 1665). Public Domain, <https://commons.wikimedia.org>

Teorema 3 (Piccolo Teorema di Fermat) *Siano a un numero intero e p un numero primo che non divide a . Allora $a^{p-1} - 1$ è un multiplo di p .*

La dimostrazione di questo teorema è nell'Appendice.

Il Piccolo Teorema di Fermat non costituisce una condizione necessaria e sufficiente affinché un numero sia primo. Un controesempio è dato da $p = 91 = 7 \cdot 13$. Si verifica infatti che $3^{90} - 1$ è un multiplo di 91.

Nel caso dei nostri numeri della forma $2^p - 1$, il Piccolo Teorema di Fermat ci dice che, scelta opportunamente una base a , se il numero

$$a^{2^p-1-1} - 1 = a^{2^p-2} - 1$$

non è un multiplo di $2^p - 1$, allora $2^p - 1$ non è un numero primo. Se invece $a^{2^p-2} - 1$ è un multiplo di $2^p - 1$, allora $2^p - 1$ potrebbe essere un numero primo.

Se $2^p - 1$ supera i primi due passi, allora il **terzo passo** consiste nell'applicare il test di Lucas-Lehmer, che permette di stabilire in modo definitivo se $2^p - 1$ sia primo.

Una premessa: stabilire se un numero sia primo, e in caso contrario determinare i suoi divisori, è uno dei problemi più difficili e affascinanti della teoria dei numeri. Si tratta però anche di una

questione centrale per la moderna crittografia e, di conseguenza, per la sicurezza dei segreti militari, industriali, o delle nostre carte di credito. Cfr. ad esempio [15].

I numeri della forma $2^p - 1$ sono però particolari numeri interi, e per essi esiste un test di primalità ad hoc, dovuto a Édouard Lucas (1842-1891) e Derrick Lehmer (1905-1991).

Teorema 4 (Test di Lucas-Lehmer) Definiamo induttivamente la successione $\{s_j\}_{j=0}^{+\infty}$

$$s_j = \begin{cases} 4 & \text{se } j = 0, \\ s_{j-1}^2 - 2 & \text{se } j \neq 0. \end{cases}$$

Allora $2^p - 1$ è primo se e solo se s_{p-2} è un multiplo di $2^p - 1$.

Non diamo la dimostrazione del test di Lucas-Lehmer, ma lo verifichiamo sull'esempio: $2^5 - 1 = 31$ (che sappiamo essere primo). Iniziamo costruendo la successione s_j , che ci servirà fino a $j = 5 - 2 = 3$:

$$\begin{aligned} s_0 &= 4, \\ s_1 &= 4^2 - 2 = 14, \\ s_2 &= 14^2 - 2 = 196 - 2 = 194. \\ s_3 &= 194^2 - 2 \end{aligned}$$

Invece di calcolare 194^2 , ricordiamo che dobbiamo stabilire se s_3 è un multiplo di 31. Poiché $194 = 6 \cdot 31 + 8$, possiamo semplificare il calcolo di s_3 considerando direttamente $8^2 - 2 = 62$. Poiché 62 è un multiplo di 31, il test conferma che $2^5 - 1$ è primo.

Perché studiare questi numeri

1. Una prima motivazione è che inserirsi in una tradizione che comprende Euclide, Mersenne ed Eulero ha un'innegabile attrattiva.
2. Una seconda motivazione viene dal fatto che il programma Prime95 di GIMPS è così impegnativo da essere diventato un test per l'hardware.³ Cfr. <https://community.intel.com/t5/Mobile-and-Desktop-Processors/Simple-instructions-for-freezing-a-Skylake-Processor/td-p/359882?start=15&tstart=0>, oppure <https://www.servethehome.com/intel-skylake-bug-uefi-bios-updates-required/>

Su <https://www.mersenne.org/download/stress.txt> si parla, con un po' di ironia, di "Torture Test".

³Lo studio dei numeri di Mersenne è quindi uno di quei casi in cui si scoprono applicazioni inaspettate di una ricerca iniziata pensando ad altro.

3. Una terza motivazione è data dall'uso dei numeri di Mersenne nella generazione di numeri pseudo-casuali. Vedi https://en.wikipedia.org/wiki/Mersenne_Twister
4. È ragionevole pensare che studi espliciti su numeri primi molto grandi possano portare applicazioni allo studio dei numeri primi di Mersenne. Alla pagina <https://www.mersenne.org/hy-join/> leggiamo:

Sebbene la matematica non sia una scienza sperimentale, spesso cerchiamo esempi per verificare congetture (che speriamo poi di dimostrare). All'aumentare del numero di esempi, cresce (in un certo senso) anche la nostra comprensione della distribuzione [dei numeri di Mersenne]. Il teorema dei numeri primi fu scoperto osservando le tavole dei numeri primi.

Appendice

Ricordiamo la funzione

$\sigma(n)$ = somma di tutti i divisori positivi di n (quindi incluso n stesso) ,

definita per ogni intero positivo n . Vedi la tabella a pag.4. Osserviamo che $\sigma(p) = p + 1$ se e solo se p è primo.

Lemma 5 *Se m e n sono due interi positivi primi tra loro (cioè con Massimo Comun Divisore 1), allora*

$$\sigma(mn) = \sigma(m)\sigma(n) .$$

Prima di scrivere la dimostrazione, vediamo un esempio preso dalla tabella a pag.4. I numeri 8 e 21 sono primi tra loro.

- I divisori positivi di 8 sono: 1, 2, 4, 8. La loro somma è 15.
- I divisori positivi di 21 sono: 1, 3, 7, 21. La loro somma è 32.

Otteniamo i divisori positivi di $8 \cdot 21 = 168$ moltiplicando in tutti i modi possibili un divisore di 8 e un divisore di 21. Sommando questi prodotti otteniamo:

$$\begin{aligned} & (1 + 2 + 4 + 8) \cdot (1 + 3 + 7 + 21) \\ &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 7 + 1 \cdot 21 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 7 + 2 \cdot 21 + 4 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 7 + 4 \cdot 21 \\ &+ 8 \cdot 1 + 8 \cdot 3 + 8 \cdot 7 + 8 \cdot 21 \\ &= 1 + 3 + 7 + 21 + 2 + 6 + 14 + 42 + 4 + 12 + 28 + 84 + 8 + 24 + 56 + 168 = 480. \end{aligned}$$

Cioè:

$$\sigma(8)\sigma(21) = (1 + 2 + 4 + 8) \cdot (1 + 3 + 7 + 21) = 480 = \sigma(168).$$

Dimostrazione del Lemma 5. Supponiamo che m abbia esattamente J divisori positivi: $c_1, c_2, \dots, c_J$, e n abbia K divisori positivi: $d_1, d_2, \dots, d_K$. Per ipotesi i c_j ($j = 1, 2, \dots, J$) e i d_k ($k = 1, 2, \dots, K$) non hanno alcun elemento comune, eccetto il numero 1. I divisori positivi di mn sono tutti e soli i termini che otteniamo moltiplicando un divisore di m per un divisore di n . Poiché m e n sono privi di divisori comuni, allora ciascuno di questi prodotti può essere scritto in uno e un solo modo. In breve: l'insieme dei prodotti $c_j d_k$ è in corrispondenza biunivoca con l'insieme delle coppie (c_j, d_k) . Abbiamo così l'insieme dei divisori di mn :

$$\{c_j d_k\}_{j=1,2,\dots,J, k=1,2,\dots,K}.$$

Quindi

$$\sigma(mn) = \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K (c_j d_k) = \sum_{j=1}^J c_j \left(\sum_{k=1}^K d_k \right) = \sigma(m)\sigma(n).$$

■

Dimostriamo il

Teorema di Euclide-Eulero. *I numeri pari perfetti sono tutti e soli quelli della forma*

$$2^{p-1} (2^p - 1)$$

con $2^p - 1$ primo.

Dimostrazione. Sia $n = 2^{p-1} (2^p - 1)$ con $2^p - 1$ primo. Poiché 2^{p-1} e $2^p - 1$ sono primi tra loro, il Lemma 5 e (1) implicano

$$\begin{aligned} \sigma(n) &= \sigma(2^{p-1}) \sigma(2^p - 1) = (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{p-1}) \sigma(2^p - 1) \\ &= (2^p - 1) 2^p = 2n, \end{aligned}$$

poiché il numero primo $2^p - 1$ ha come divisori positivi solo 1 e se stesso (e quindi la somma è 2^p). Dunque n è pari e perfetto.

Viceversa, sia n pari e perfetto. Scriviamolo nella forma $n = 2^{p-1} q$, con $p > 1$ e q dispari. Allora, essendo 2^{p-1} e q primi tra loro, il Lemma 5 implica

$$2^p q = 2n = \sigma(n) = \sigma(2^{p-1}) \sigma(q) = (2^p - 1) \sigma(q).$$

Quindi il numero dispari $2^p - 1$ divide q . Scriviamo $q = (2^p - 1)s$. Allora, sostituendo questa scrittura nell'ultima catena di uguaglianze e semplificando, otteniamo

$$\sigma(q) = 2^p s.$$

Ora osserviamo che s e $q = (2^p - 1)s$ sono due diversi divisori di q e

$$q + s = 2^p s = \sigma(q) .$$

Dunque q e s sono *tutti* i divisori di q e quindi q è primo, mentre $s = 1$. Quindi $q = 2^p - 1$ e $n = (2^p - 1)2^{p-1}$, con $2^p - 1$ primo. ■

Ora dimostriamo il

Piccolo Teorema di Fermat. *Siano a un numero intero e p un numero primo che non divide a . Allora $a^{p-1} - 1$ è un multiplo di p .*

Dimostrazione. Possiamo supporre $a > 0$. Sia $0 < k < p$. Allora il coefficiente binomiale

$$\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!} \quad (2)$$

è un multiplo di p . Infatti il coefficiente binomiale è un numero intero, il numeratore in (2) è uguale a $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot p$, e il denominatore non è un multiplo del numero primo p . Allora, usando lo sviluppo del binomio, otteniamo

$$(a+1)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} a^k = a^p + 1 + \text{multipli di } p ,$$

cioè

$$(a+1)^p - (a+1) = a^p - a + \text{multipli di } p . \quad (3)$$

Dimostriamo per induzione sull'intero positivo a che

$$a^p - a \text{ è un multiplo di } p . \quad (4)$$

Infatti, la proprietà (4) è vera per $a = 1$, mentre l'uguaglianza (3) mostra che se (4) è vera per a , allora è vera anche per $a + 1$. Infine, (4) significa che esiste un numero intero k tale che

$$a^p - a = kp ,$$

cioè

$$a(a^{p-1} - 1) = kp .$$

Allora, poiché p non divide a , deve dividere $a^{p-1} - 1$, e questo conclude la dimostrazione. ■

Indicazioni bibliografiche

- [1] D. Banks, Translating the academic article in the late 17th century, *Lingua* 245 (2020)
<https://univ-brest.hal.science/hal-04202551/document>
- [2] C. Boyer, *Storia della matematica*, Mondadori (1980).
- [3] L. Dickson, *History of the theory of numbers*, V. 1, AMS Chelsea Publishing (2002).
- [4] encyclopedia.com, Marin Mersenne Leads an International Effort to Understand Cycloids. <http://www.encyclopedia.com/science/encyclopedias-almanacs-transcripts-and-maps/marin-mersenne-leads-international-effort-understand-cycloids>
- [5] Euclide, *Tutte le opere*. Bompiani (2007).
- [6] Euclid's Elements.
<http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookI/bookI.html>
- [7] P. Gozza, La Rivoluzione scientifica: i domini della conoscenza. La musica. in: *Enciclopedia Treccani, Storia della Scienza* (2002).
[https://www.treccani.it/enciclopedia/la-rivoluzione-scientifica-i-domini-della-conoscenza-la-musica_\(Storia-della-Scienza\)/](https://www.treccani.it/enciclopedia/la-rivoluzione-scientifica-i-domini-della-conoscenza-la-musica_(Storia-della-Scienza)/)
- [8] B. Hauréau, *Histoire littéraire du Maine*, Dumoulin, libraire, 1876.
https://www.google.it/books/edition/Histoire_litteraire_du_Maine/yYONAAAAIAAJ?hl=en&gbpv=1&dq=Histoire+litt%C3%A9raire+du+Maine&printsec=frontcover
- [9] G. Lombardo, Padre Marin Mersenne: l'umile figlio di San Francesco di Paola divenuto il "segretario dell'Europa dotta" del XVII secolo. *Paenitemini* n.2 (2023), 101–146.
<https://www.bibliotecacharitas.it/paenitemini-n-2-novembre-2023/>
- [10] M. Mersenne, *Cogitata Physico Mathematica*, Ed. Antoine Bertier, Paris (1644).
<https://dn720600.ca.archive.org/0/items/fmarinimersennic00mers/fmarinimersennic00mers.pdf>
- [11] *Ordine dei Minimi di San Francesco di Paola*.
<https://www.ordinedeiminimi.it/frati.htm>
- [12] R. Paradowski, Marin Mersenne. EBSCO Knowledge Advantage.
<https://www.ebsco.com/research-starters/history/marin-mersenne>
- [13] *Stanford Encyclopedia of Philosophy/Mersenne*.
<https://plato.stanford.edu/entries/mersenne/>
- [14] *The Society of Catholic Scientists, Marin Mersenne*.
<https://catholicscientists.org/scientists-of-the-past/marin-mersenne/>

- [15] G. Travaglini, *Crittografia*, Emmeciquadro **21** (2004), 21–28.
- [16] G. Ziegler, *The great prime number record races*, Notices Amer. Math. Soc. **51** (2004), 414–416.
<https://www.ams.org/journals/notices/200404/comm-ziegler.pdf>