

FELIX KLEIN E HANS FREUDENTHAL

Due matematici fra ricerca scientifica e innovazione didattica

di Maria Piera Manara*

L'autrice riflette sul profondo contributo nella pedagogia della matematica offerto da due importanti matematici, Felix Klein e Hans Freudenthal: l'uno vissuto fino alla Grande Guerra, l'altro dopo la seconda Guerra Mondiale. Le loro idee influenzano l'educazione matematica ancora oggi.

* Laureata in Matematica, ha insegnato a vario titolo in corsi universitari di Geometria e di Algebra in diversi atenei

Felix Klein

Felix Klein (1849-1925) nasce in una famiglia borghese a Düsseldorf, dove studia brillantemente al *Gymnasium*, ricevendo una educazione riformata, aperta sia al sapere umanistico sia a quello scientifico. Indirizzatosi alla matematica e alle scienze, compie gli studi universitari a Bonn, dove ottiene il dottorato nel 1868; si perfeziona poi a Gottinga, a Berlino e nel 1870 a Parigi, tutte sedi in cui incontra i più influenti matematici dell'epoca. Sono anni in cui matura le sue idee più importanti sulla geometria non euclidea, sui gruppi di trasformazioni, sulle applicazioni della teoria dei gruppi alla geometria [18]. Pubblicati lavori importanti, Klein ottiene l'abilitazione nel 1871. Nel 1872 assume la cattedra all'Università di Erlangen, in Baviera, che tiene fino al 1875.

Ai nuovi professori di Erlangen si richiede la presentazione scritta di idee originali. In questa occasione, Klein propone il testo fondamentale che viene citato come *Programma di Erlangen: Considerazioni comparative intorno a ricerche geometriche recenti* [19], in cui sono esposte le nuove idee sulla geometria, elaborate anche con Sophus Lie (1842-1899) negli anni di studio precedenti.

A Erlangen Klein già mostra come gli stiano anche a cuore le idee che riguardano l'insegnamento e l'apprendimento, in particolare della matematica; infatti, nel discorso inaugurale di uno dei suoi corsi — *Antrittsrede* [24] — sono esposte importanti riflessioni, che negli anni successivi sarebbero state da lui implementate e approfondite con coerenza.

«Negli studi specialistici, non bisogna dimenticare l'unità di tutte le scienze e l'ideale di una educazione globale. Educazione umanistica e matematico-scientifica sono legate tra loro e non devono porsi in contrapposizione. D'altro canto, oltre che alla matematica pura bisogna dedicarsi a quella applicata per garantire i rapporti con le discipline affini come la fisica e la tecnica. Inoltre nella matematica, assieme alle capacità logiche, bisogna sviluppare - come fattore ugualmente importante - l'intuizione e soprattutto la fantasia matematica e la creatività che con essa cresce. Infine l'università deve curare



Felix Christian Klein
(1849-1925)

l'insegnamento nelle scuole propedeutiche e quindi dare una particolare importanza alla formazione degli aspiranti insegnanti» ([16], [24]).

Nel 1875 Klein sposa Anna Hegel, nipote del filosofo Friedrich Hegel (1770-1831). Nasceranno un figlio e tre figlie. Sempre nel 1875 Klein si trasferisce su una cattedra al Politecnico di Monaco (*Technische Hochschule* dal 1877), poi nel 1880 su una cattedra di geometria all'Università di Lipsia, in Sassonia. In entrambe le sedi, egli si dedica instancabilmente alla ricerca matematica e alla didattica, maturando le idee che aveva anticipato nella prolusione di Erlangen. Riesce a formare matematici di valore; si impegna a migliorare la qualità degli studi; a Lipsia riesce a ottenere un edificio indipendente per gli studenti di matematica con aule per lezioni, spazi per esercitazioni, un laboratorio di modelli (che hanno un posto rilevante nella sua visione dell'insegnamento che valorizza l'intuizione), un seminario di matematica e soprattutto una biblioteca specializzata.



Particolari della vetrina con i modelli in gesso e in ferro e fili di seta del Catalog Brill-Schilling nella biblioteca di matematica dell'Università di Padova

I pezzi più antichi della collezione furono costruiti presso l'atelier dell'istituto di matematica del Politecnico di Monaco di Baviera, fondato negli anni Settanta dell'Ottocento. La necessità di utilizzare modelli per la didattica fu fortemente sostenuta dal matematico Giuseppe Veronese.

<https://mostre.cab.unipd.it/modellimatematici/it/39/la-collezione>

Tuttavia, il lavoro didattico pesante e lo stress indotto da una dura competizione scientifica col più giovane matematico francese Henri Poincaré (1854-1912) su argomenti studiati da entrambi, nel 1882 procurano a Klein un grave esaurimento nervoso, lungo da curare; Poincaré procede rapidamente e ottiene risultati definitivi sulla teoria. Klein si rende conto che la sua eccezionale creatività matematica si sta esaurendo; nel 1886 accetta la cattedra all'Università di Gottinga, dove si dedica all'insegnamento, tenendo vari corsi anche legati alla fisica, all'organizzazione della ricerca, e, allo stesso tempo, all'introduzione di un programma di riforme educative nell'insegnamento preuniversitario, che sarebbe diventato noto come *Le riforme di Klein*. Svolge il proprio lavoro fino al pensionamento per motivi di salute, nel 1913, ma non smette di studiare e insegnare privatamente fino alla morte.

A Gottinga, che fa parte della Prussia dal 1866, Klein trova l'ambiente e l'aiuto politico adatti a implementare il proprio progetto di rendere l'università un centro di riferimento matematico internazionale. Senza paura di farsi ombra, nel 1895 Klein riesce a far chiamare David Hilbert (1862-1943) a ricoprire una seconda cattedra di matematica; nel 1902 Hermann Minkowski (1864-1909),

e altri ancora. Insieme, Hilbert e Klein raggiungono il risultato di rendere Gottinga un centro esemplare, richiamando studiosi da vari paesi.

Le testimonianze concordano sulla grande bravura di Klein come appassionato e brillante insegnante. Così scrive il fisico Max Born (1882-1970), premio Nobel nel 1954: «Klein non solo padroneggiava la matematica nel suo complesso, ma anche tutte le scienze naturali. Grazie alla sua potente personalità, completata dal suo bell'aspetto, divenne una figura di spicco nella facoltà e nell'intera università. Con il passare degli anni, Klein divenne sempre più come Zeus, al di sopra degli altri dei. Era conosciuto tra noi come "il Grande Felix" e controllava i nostri destini» ([3], [25]).

L'eco in Italia: la formazione degli insegnanti.

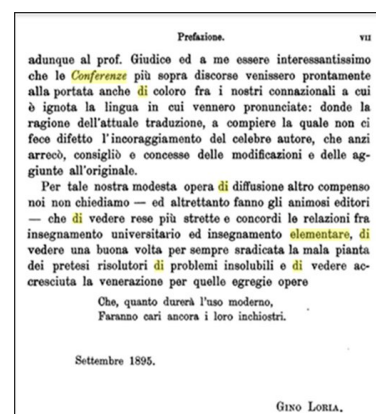
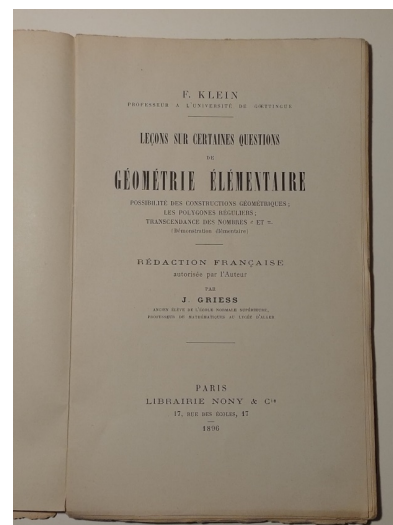
Matematiche elementari dal punto di vista superiore

Nel 1893, il giovane matematico italiano Gino Fano (1871-1952), allievo di Corrado Segre (1863-1924) all'Università di Torino, ha una borsa di perfezionamento per studiare con Klein a Gottinga.

La sua testimonianza illustra vivacemente l'organizzazione degli studi di matematica e della vita universitaria. In particolare, viene segnalato che gli insegnanti di scuola secondaria si riuniscono per aggiornamento a Gottinga, nelle vacanze primaverili [10]: «[...] In Germania vi è oggi ancora separazione quasi assoluta fra le università e gli istituti tecnici superiori (*Technische Hochschulen*). Per quanto da parecchio tempo sia invalso l'uso di affidare in questi istituti a scienziati insigni la cattedra di matematica, pure il fatto stesso che essi si trovano generalmente (con poche eccezioni, per esempio Charlottenburg, Berlino e Monaco) in città prive di altri istituti superiori contribuisce già non poco al loro isolamento; e solo in questi ultimi tempi si sono alzate alcune voci contro questo stato di cose. Mirabile esempio invece la Francia, dove i matematici più illustri del secolo sono tutti usciti dall'*École polytechnique*! Ma molto avremmo invece da imparare dalla Germania per quanto si riferisce ai rapporti fra istituti secondari e superiori. In seguito a una disposizione del Governo prussiano ogni anno nelle vacanze pasquali gli insegnanti di scuole secondarie sono invitati a riunirsi, quelli delle province orientali a Berlino, quelli delle province occidentali a Gottinga; e lì rimangono circa quindici giorni, a contatto degli insegnanti universitari».

Un altro matematico italiano, Gino Loria, (1862-1954), professore di Algebra e Geometria analitica all'Università di Genova, nel 1895 promuove la traduzione italiana di un corso di conferenze di geometria elementare, tenute da Klein nella primavera del 1894 [20]: *Conferenze sopra alcune questioni di Geometria elementare* (*Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie*).

Questo libro di Klein influenza un progetto di Federigo Enriques (1871-1946), importante figura della matematica e della cultura italiana. In una lettera datata 28 marzo 1899 e indirizzata a Guido Castelnuovo (1865-1952), suo mentore, ([5], n. 442), Enriques racconta di avere incontrato Klein durante un viaggio di quest'ultimo in Italia, e di aver parlato a lungo con lui, di argomenti di ricerca ma anche di cultura generale: «[...] il soggetto di cui abbiamo discorso più lungamente è quello che si riferisce ai problemi psicologici matematici». Enriques rimane impressionato e affascinato dai diversi aspetti della personalità di Klein. In una lettera successiva, ([5], n.455, stesso anno, fine maggio), scrive a Castelnuovo di un suo progetto da attuarsi in collaborazione con giovani laureati e insegnanti delle scuole secondarie: «[...] un libro dedicato a tutte le questioni che interessano la geometria elementare (fra queste vi sono anche quei problemi non di secondo grado trattati dal Klein)». Fu l'origine del fondamentale testo di Enriques uscito nel 1900:



Pagine dall'edizione italiana (1895) e da quella francese (1896) di Conferenze sopra alcune questioni di Geometria elementare

Questioni riguardanti la Geometria elementare, poi ampliato in edizioni successive: *Questioni riguardanti le matematiche elementari* [8].

Il lavoro iniziato da Klein con il libro del 1895 prosegue con la raccolta delle lezioni dei suoi corsi di *Matematiche elementari dal punto di vista superiore* [21], la cui pubblicazione iniziata nel 1902 prosegue nel corso degli anni; l'edizione definitiva a stampa, in tre volumi, avviene negli anni 1924-1928. Nell'introduzione al primo volume si trova l'osservazione che motiva il suo impegno: riguarda la *doppia discontinuità*, e il *doppio oblio*, per chi intraprende gli studi universitari di matematica. La completa diversità fra gli studi universitari e gli studi precedenti porta a un primo oblio (degli studi secondari) e l'insegnamento professionale preuniversitario conduce al secondo oblio (degli studi universitari fatti). Ne viene a Klein la lucida consapevolezza della necessità di agire su vari piani, per attuare le idee che si trovano presenti già nell'*Antrittsrede* di Erlangen [24].

Il primo volume tratta nella prima parte i sistemi numerici, nella seconda l'algebra, nella terza l'analisi. Si sottolineano le applicazioni pratiche, con il trattamento dettagliato del meccanismo delle macchine calcolatrici; si applicano metodi grafici e geometrici nella teoria delle equazioni; si trattano le funzioni trascendenti elementari; vengono sottolineate le reciproche connessioni fra i vari ambiti. Il secondo volume è dedicato alla geometria, e di fatto costituisce un'esposizione chiara e organica del *Programma di Erlangen*. Le geometrie vengono classificate in base agli invarianti di certi gruppi di trasformazioni. La terza parte del volume è una discussione sulla geometria e i suoi fondamenti, che comprende l'analisi degli *Elementi* di Euclide e le geometrie non euclidee. Alla fine vengono esaminate le riforme dell'insegnamento della geometria elementare in Inghilterra, Francia, Germania e Italia. Il terzo volume è centrato sul confronto fra matematica di precisione e di approssimazione, ovvero sul legame fra la matematica e le sue applicazioni. Vengono studiate le funzioni di variabile reale e la loro rappresentazione in un sistema di coordinate: il *focus* è un confronto fra proprietà che possono essere considerate solo nel campo teorico della matematica astratta e proprietà che possono essere colte dall'intuizione; la geometria delle curve piane; le relazioni tra curve e superfici [22].

La riforma dell'istruzione di Klein

e la Commissione Internazionale dell'Insegnamento Matematico

Si è visto come Klein, con i suoi collaboratori, si sia speso per migliorare le condizioni della didattica universitaria al Politecnico di Monaco e a Gottinga. È dal 1902 che Klein approfondisce lo studio della situazione dell'istruzione secondaria, arrivando a formulare l'idea centrale della proposta di riforma: il *ragionamento funzionale*, ossia l'idea che il concetto dinamico di funzione debba essere alla base del curriculum di matematica. Dalla centralità di questa idea deve seguire immediatamente l'introduzione del *calcolo* nel curriculum ginnasiale. Klein riesce a suscitare un movimento di riforma esteso e dinamico fra gli insegnanti di tutti gli stati tedeschi e di tutte le scuole. Il documento programmatico, noto come *Riforma di Merano*, o *Sillabo di Merano*, fu presentato nella cittadina di Merano nel 1905 durante un congresso della *Deutsche Mathematiker-Vereinigung* (DMV).

Nei primi anni del Novecento Klein è dunque un riconosciuto esperto, a livello internazionale, dei problemi dell'istruzione matematica: il quarto *Congresso mondiale dei matematici*, organizzato a Roma nel 1908, nella sessione relativa a *Questioni filosofiche, storiche e didattiche*, istituisce la *Commissione Internazionale dell'Insegnamento Matematico*, e ne nomina come presidente Klein. La commissione, che continua a lavorare fino al 1914, doveva svolgere

uno studio comparativo di carattere internazionale sui programmi e le metodologie d'insegnamento della matematica nelle scuole secondarie, poi elaborare proposte per la formazione degli insegnanti e infine dare proposte di riforma a livello internazionale. Nella sessione di lavoro tenutasi a Parigi, gli argomenti tematici corrispondono ai due principali argomenti dell'agenda di riforma kleiniana: l'educazione matematica degli ingegneri e la valutazione dell'introduzione del calcolo differenziale e integrale nelle scuole secondarie. Come presidente [26], Klein estende il proprio lavoro a livello internazionale, istituendo in tutti i continenti una rete di commissioni nazionali, che collaborano riguardo all'analisi della situazione dell'istruzione nei vari paesi, e poi anche su temi di riforme curriculari.

La Grande Guerra interrompe il lavoro della commissione, che sarà ricostituita nel 1928, in occasione dell'*Ottavo Congresso Internazionale dei Matematici*, a Bologna ([15], [27]), nell'ambito della formatasi nuova IMU; un'altra interruzione dei lavori dell'IMU si ha per la seconda Guerra Mondiale. Durante la prima assemblea generale dell'IMU nel 1952 a Roma, la commissione viene trasformata in sottocommissione permanente dell'IMU; infine nel 1954 la seconda Assemblea generale dell'IMU ne definisce la struttura e ne stabilisce il nome: *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI).

Influenza della visione di Klein sui matematici italiani tra Ottocento e Novecento

Non è l'aspetto dell'influenza scientifica sui geometri italiani che si vuole qui evidenziare, quanto la condivisione di un grande progetto culturale ed educativo, nello spirito kleiniano di attenzione all'istruzione scolastica e universitaria e alla formazione degli insegnanti.

Il nuovo Regno d'Italia ha il grande compito di migliorare l'istruzione della popolazione. Per rispondere all'esigenza di formare i futuri insegnanti e di garantire in tal modo un più alto livello della scuola secondaria, nel 1875 vengono stabilite dal ministro Ruggero Bonghi le *Scuole di Magistero*, che sopravvivono con successive modifiche fino al 1920, quando ne viene decretata la soppressione. In queste scuole insegnano matematici di alto livello. Per esempio, oltre al proprio corso istituzionale, Corrado Segre insegna alla *Scuola di Magistero* per la formazione degli insegnanti, annessa alla facoltà di Scienze dell'Università di Torino [17]. Egli è in corrispondenza con Klein dal 1883 e lo incontra a Gottinga nel 1891. L'influenza di Klein si percepisce oltre che nella scelta dei metodi e dei filoni di ricerca, anche nel modo di concepire l'insegnamento secondario della matematica e l'organizzazione degli studi. Sono in particolare gli assunti pedagogici di Klein che vengono fatti propri da Segre: colmare la frattura fra insegnamento secondario e universitario, valorizzare le applicazioni della matematica a tutte le scienze naturali, introdurre precocemente i concetti di funzione e di trasformazione, avvalersi dell'aspetto storico della disciplina, catturare l'interesse di chi studia presentando la materia in modo intuitivo e, soprattutto, dare risalto alle matematiche elementari da un punto di vista superiore nell'insegnamento rivolto ai futuri insegnanti di scuola secondaria.

Anche Enriques, con innumerevoli iniziative, si impegna attivamente nella riflessione sull'educazione scientifica in Italia secondo il pensiero di Klein. Prende parte attiva ai congressi della *Federazione Nazionale Insegnanti Scuola Media* (FNISM) a partire dal primo a Firenze nel 1902; nel quinto congresso a Bologna nel 1906 considera la formazione degli insegnanti. Dal 1912 al 1915 è presidente dell'*Associazione Italiana dei Professori Universitari*, e presenta un progetto di riforma universitaria. È presidente della

Mathesis dal 1919 al 1932; l'amico Guido Castelnuovo ne era stato presidente dal 1911 al 1914. Nel 1906 fonda la *Società filosofica italiana*, di cui è presidente fino al 1913. Il congresso di Bologna del 1911, da lui organizzato, provoca il noto, aspro scontro con Benedetto Croce (1866-1952) e Giovanni Gentile (1875-1944). Si intensifica il suo impegno culturale nei corsi universitari, per rafforzare la prospettiva storica nell'insegnamento, nella ricerca di linee di unità del più vasto sapere matematico e scientifico, teorico e applicativo, umanistico e scientifico; inoltre si impegna nella preparazione di testi per la scuola secondaria, per l'università, e nella divulgazione scientifica ad alto livello. Non si può non riconoscere in questa attività l'influsso del pensiero e dell'opera materiale di Klein.

Nella voce *Matematica* dell'*Enciclopedia italiana* [9], Enriques esplicitamente riconosce a Klein di essere stato il propulsore di una nuova forma di insegnamento, con «[...] metodi più intuitivi ed empirici [...]», e afferma che in Italia, dopo la riforma Gentile, l'esempio di ordinamento degli studi più vicino alle idee kleiniane è quello del liceo scientifico.

Un altro importante matematico, profondamente interessato all'aspetto educativo, si richiama espressamente alle idee di Klein: Bruno de Finetti (1906-1985) [1]. Nella prefazione alla prima edizione (1944) del testo *Matematica logico intuitiva* [7], de Finetti richiama esplicitamente come fonte di ispirazione le lezioni di Klein: «[...] Programmi ispirati a vedute analoghe furono da tempo propugnati e propagandati, anche se purtroppo con scarso successo, particolarmente da F. KLEIN di cui devo ricordare i tre volumi di *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* come una delle opere maggiormente tenute presenti nella preparazione del corso. Nello stesso senso agì l'influenza dell'insegnamento del CHISINI [...] e anche varie altre opere dell'ENRIQUES o da lui promosse sul significato della storia del pensiero scientifico e in particolare matematico».

Le idee di Klein, in particolare il *fusionismo* e il *metodo genetico*, che permettono di seguire nella presentazione dei concetti il cammino di sviluppo intellettuale e psicologico dei discendenti e dello sviluppo storico della materia, insieme a un forte richiamo all'intuizione e contemporaneamente alla concretezza, sono linee guida dell'impegno didattico di Bruno de Finetti, nei suoi corsi universitari, nei testi per le scuole e l'università, negli interventi sul *Periodico di Matematiche*, di cui sarà direttore dal 1972 al 1981, e su molte altre riviste. Egli sarà presidente della *Mathesis* dal 1970 al 1981. La sua visione riguardo l'unità del sapere scientifico gli fa apprezzare l'istituzione della cattedra di insegnamento di *Matematica e Osservazioni scientifiche* nella nuova scuola media unica, (1963), di cui non tutti sono entusiasti.

Ed ecco le parole scritte da Guido Castelnuovo [6], nella commemorazione di Klein, in occasione della scomparsa: «[...] Discorrendo di lui dobbiamo porre mente al pensiero filosofico che ispira tutti i suoi scritti, all'importanza dei problemi che egli ha proposto e che hanno provocato le indagini di altri matematici insigni, all'efficacia del suo insegnamento, che ha dominato quasi tutti i campi della nostra scienza e ha portato luce e rivelato legami impreveduti in svariate teorie; dobbiamo ricordarci delle sue eccezionali facoltà organizzatrici che hanno suscitato tante altre iniziative.

Il Klein fu un grande animatore e per dar vita alle sue idee ebbe la risorsa di eminenti qualità artistiche. Riconosciamo in lui una dote che spetta agli artisti sommi: la facoltà di scolpire in forma definitiva immagini che ad altri erano apparse annebiate e senza rilievo [...]. Alcuni suoi scritti e in particolar modo il suo insegnamento diffuso in tutto il mondo ebbero una influenza così grande sopra una parte dei matematici contemporanei che spesso, quasi

inconsapevolmente, pensiamo secondo le sue vedute e adoperiamo il suo linguaggio».

In una generazione successiva a quella di Klein, un altro matematico, tedesco-olandese, ebbe grande influenza nella pedagogia della matematica: Hans Freudenthal. Alcuni aspetti accomunano profondamente la ricerca intellettuale e morale dei due matematici.

Hans Freudenthal

Hans Freudenthal (1905-1990) nacque a Luckenwalde in Prussia, in una famiglia ebraica. Benché molto interessato anche agli studi umanistici, decise di studiare matematica e fisica all'Università di Berlino; passò un semestre nel 1927 a Parigi, e finì il dottorato a Berlino nel 1930, con una tesi sui bordi di spazi topologici, introducendo concetti che da lui presero il nome. Subito accettò la chiamata di Luitzen Brouwer (1881-1966) ad Amsterdam, come suo assistente. Nel 1932, sposò Suzanne (Suus) Johanna Lutter, che aveva studiato letteratura tedesca all'Università di Amsterdam.

Negli anni fino allo scoppio della guerra, Freudenthal ebbe un'intensa attività di ricerca e di insegnamento (insegnò algebra, teoria dei gruppi, teoria della misura, analisi complessa, topologia, operatori lineari). Fu il principale curatore della rivista *Compositio Mathematica*. Durante l'occupazione tedesca fu sospeso come ebreo dai compiti accademici, fu per un certo tempo in una prigione della Gestapo, e fu nel 1944 in un campo di lavoro nell'Olanda Orientale, da cui la moglie Suus riuscì a farlo fuggire. Ritornato al suo lavoro accademico alla fine della guerra, nel 1946 fu chiamato su una cattedra di geometria nella facoltà di Scienze dell'Università di Utrecht, dove rimase fino al pensionamento nel 1976. I suoi interessi di studio e ricerca si allargarono alla geometria, in particolare alla rappresentazione di gruppi. Come si vede, interessi poliedrici, che compresero anche studi di letteratura, filosofia e storia, e portarono a molti risultati importanti e a un grande numero di pubblicazioni [23]. Ma voglio approfondire un altro aspetto del suo lavoro, che divenne prevalente a partire dagli anni Cinquanta: l'interesse per l'educazione matematica. Fu sicuramente un interesse condiviso con la moglie Suus, che negli anni dopo la guerra si interessò attivamente di riforme della pedagogia scolastica, sostenne il metodo Montessori e a partire dagli anni Sessanta introdusse le idee del pedagogista tedesco Peter Petersen (1884-1952) e delle scuole *Jenaplan* nelle scuole olandesi [4].



Hans Freudenthal
(1905-1990)

L'influenza del Bourbakismo sull'educazione matematica

Dopo la fine della seconda Guerra mondiale si diffonde la consapevolezza della necessità di modernizzazione e democratizzazione dell'insegnamento, in particolare della matematica e delle altre materie scientifiche, a ogni livello scolastico, nella prospettiva dell'educazione del cittadino consapevole e democratico.

Nel 1952 nasce ufficialmente in Francia, a *La Roquette par Melun*, la *Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques* (CIEAEM), che ha come presidente il matematico Gustave Choquet (1915-2006) di Parigi, vice-presidente lo psicologo Jean Piaget (1896-1980) di Ginevra, e segretario il matematico e pedagogista Caleb Gattegno (1911-1988) di Londra. Fra i membri fondatori vi sono filosofi, pedagogisti, matematici fra cui Jean Dieudonné (1906-1992) e Hans Freudenthal, docenti di scuola secondaria, fra cui Emma Castelnuovo (1913-2014). La composizione della commissione riflette la volontà di arrivare a riforme dell'insegnamento alla luce degli studi del Novecento sulle strutture

matematiche e psicologiche. Il lancio dello Sputnik da parte dell'Unione Sovietica nel 1957 accelera il dibattito, negli USA e in Europa, sulla necessità di implementare importanti riforme.

Su iniziativa dell'*Organisation European Economic Cooperation* (OEEC), nel novembre 1959 viene organizzato un seminario internazionale al *Centre Culturel* di Royaumont, (Asnières-sur-Oise). Temi del dibattito, presieduto da Marshall Stone (1903-1989), presidente dell'ICMI, sono: il nuovo pensiero matematico, il nuovo pensiero sull'educazione matematica, l'implementazione delle riforme. Il matematico francese Dieudonné propone l'intervento più influente, con il suo progetto di riforma esplicitamente ispirato dalla scuola bourbakista. Si affermerà nell'insegnamento la visione strutturalista del Bourbakismo, supportata dalle idee di Piaget sullo sviluppo psicologico, che porta all'introduzione nella didattica della *nuova matematica* [27]. Si avranno nell'insegnamento la grande ondata dell'*insiemistica* e l'ostracismo alla *geometria di Euclide*.

L'impegno pedagogico di Freudenthal *Realistic Mathematics Education.*

Freudenthal rivolge il suo interesse principale all'educazione matematica a partire dagli anni Cinquanta, ma già da quando riprende il suo lavoro dopo la guerra comincia a condividere con la moglie Suus l'impegno nella scuola montessoriana che essa ha fondato [4]. Entrambi considerano l'educazione come la chiave per ricostruire il paese dopo la guerra. All'inizio degli anni Sessanta, la moglie Suus si appassiona attivamente alle idee del pedagogista tedesco Petersen e delle scuole *Jenaplan*, che introduce in Olanda. Il programma educativo della Scuola di Jena prevede una didattica attiva, divisa in gruppi, volta all'apprendimento teorico e pratico, favorendo la socializzazione, lo stimolo reciproco e il mutuo insegnamento, svincolata dal tradizionale iter scolastico e coinvolta nella vita sociale. Il discente è posto al centro del processo educativo. Per anni Suus è la principale connessione fra Freudenthal e l'ambito dell'educazione. È evidente la consonanza fra le idee educative basate sulla centralità del discente e le idee nel campo dell'educazione matematica che egli sosterrà [4]. Freudenthal diviene una figura di rilievo a livello nazionale e internazionale; è membro della sottocommissione nazionale olandese dell'ICMI, e nel 1955 diviene rappresentante del suo paese all'ICMI e membro aggiunto del comitato esecutivo. Al *XIII Congresso internazionale dei matematici* nel 1958 a Edimburgo, Freudenthal presenta una relazione dal titolo *Comparative study of methods of initiation into geometry*, in cui afferma esservi un consenso generale sull'opportunità di un metodo basato inizialmente sull'intuizione e sulla partenza da problemi concreti.

Freudenthal non partecipa al seminario di Royaumont, in cui si afferma la corrente bourbakista; commenterà in seguito che se fosse stato presente, l'esito del dibattito sarebbe stato diverso. Diventerà un energico oppositore dello strutturalismo della *Nuova Matematica* e, grazie alla fondazione dello IOWO in Utrecht, il fondatore di una nuova direzione nell'educazione matematica, il cosiddetto *insegnamento matematico realistico*, che troverà infine adesione internazionale, in particolare con e dopo l'introduzione dei test PISA. Nel 1963, egli entra nel comitato esecutivo dell'ICMI, come membro fino al 1966, e come presidente dal 1967 al 1970 (poi fino al 1978 come membro ex-officio). Durante gli anni della sua presidenza fonda un nuovo giornale, specificamente dedicato alla ricerca nell'ambito dell'educazione matematica, *Educational Studies in Mathematics* (ESM), e organizza il primo *International Congress on Mathematical Education* (ICME) a Lione nel 1969.

Nel 1971 fonda a Utrecht, e ne diviene direttore, l'istituto per lo sviluppo dell'insegnamento matematico, *Institut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs* (IOWO), divenuto dopo la sua morte l'*Istituto Freudenthal*. Il lavoro dell'istituto diventa decisivo per la diffusione a livello internazionale dell'approccio realistico all'insegnamento: i test PISA – *Programme for International Student Assessment* – sono basati su tale filosofia. Nel 2000, il Comitato esecutivo dell'ICMI crea due premi (prima biennali poi quadriennali) per la ricerca sull'educazione matematica, intitolati uno a Felix Klein e uno a Hans Freudenthal. Nel 2013 un terzo premio viene intitolato a Emma Castelnuovo.

Ripensando l'educazione matematica

Lezioni tenute in Cina

Nel 1987, ormai ottantaduenne, Freudenthal accettò lo stimolante invito delle Università cinesi di Beijing e Shanghai, e di qualche *Teachers College*, a tenere una serie di conferenze e seminari sull'educazione matematica.

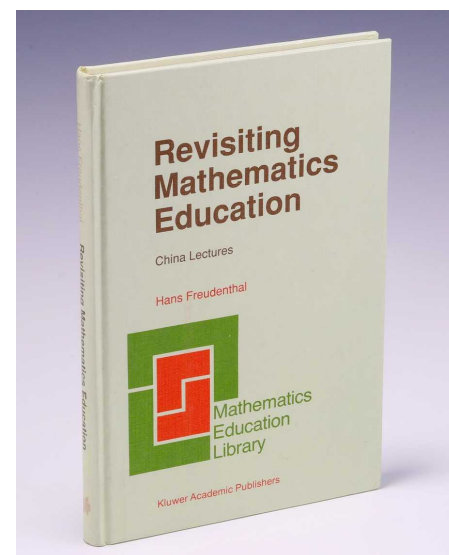
Nonostante la stima che la comunità universitaria aveva di lui come scienziato e come educatore, gli universitari cinesi ebbero difficoltà nel seguire il suo pensiero. E ciò lo spinse a rivedere, riordinare e chiarire le idee sul suo lavoro di quaranta anni in ricerca e concreta attività pedagogica, in un libro che uscì postumo nel 1991, come omaggio dei suoi allievi, col titolo suggestivo *Revisiting Mathematics Education. China Lectures* [14]. Le lezioni cinesi sono divise in tre capitoli, dedicati rispettivamente alla fenomenologia della matematica, alla presentazione dei principi didattici, al panorama dell'educazione matematica. Nel primo capitolo espone la sua concezione della matematica: concetti matematici, strutture e idee servono a organizzare i fenomeni del mondo reale e della matematica stessa. Nel secondo, tre sono i principi didattici esposti che caratterizzano la sua prospettiva: educazione matematica come reinvenzione guidata, connessione con la realtà, focalizzazione sui processi di apprendimento con visione di lungo periodo. Dunque, insegnamento e apprendimento devono iniziare in contesti ricchi, in cui la matematica possa essere studiata e sperimentata nella realtà. L'apprendimento è necessariamente basato sullo scambio con altri. Nell'ultimo capitolo sono riassunte le sue concezioni critiche sull'educazione matematica e la ricerca didattica, e il lavoro svolto dal suo istituto a Utrecht.

Non sono molti i testi di Freudenthal tradotti in italiano. Fra di essi ricordo *Ripensando l'educazione matematica*, tradotto nel 1994 da Carlo Felice Manara (1916-2011) per la casa editrice La Scuola, purtroppo oggi fuori commercio. Vi si trovano, oltre a problemi e suggerimenti proposti, anche esempi di situazioni didattiche concrete. In particolare, molti di essi illustrano con chiarezza i concetti di matematizzazione orizzontale e verticale. L'idea fondante di assumere come punto di partenza e valorizzare l'esperienza concreta dei discenti, che porta alla *reinvenzione guidata*, è stata il punto di partenza del lavoro didattico volto ad allievi con difficoltà in matematica, che Carlo Felice Manara seguì con grande passione negli ultimi anni di lavoro.

Un'altra idea illuminante è quella di considerare e rispettare la genesi psicologica dei concetti nel discente – e qui si vedono profonde consonanze con le idee di Klein, della scuola geometrica italiana, di de Finetti.

Le Nuove Indicazioni Nazionali

Le Nuove Indicazioni Nazionali del MIM per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione, in vigore dall'anno scolastico 2026-27 [32], insistono fortemente su una impostazione attiva, esperienziale dell'insegnamento della matematica, con l'obiettivo di «favorire la costruzione di un patrimonio strutturato di conoscenze e lo sviluppo di un pensiero



matematico critico e creativo, utile per interpretare, studiare e analizzare fenomeni». Si riconoscono le tracce dell'impostazione culturale basata sulla *Realistic Mathematics Education* (RME), di cui Freudenthal fu sostenitore: «[...] Al termine della classe terza gli alunni sapranno: applicare il ragionamento logico in ambiti diversi e porre e risolvere problemi di diversa complessità in contesti matematici e interdisciplinari [...]. Utilizzare gli strumenti matematici appresi per affrontare e risolvere situazioni reali, sviluppando un atteggiamento positivo, consapevole e proattivo nei confronti della matematica [...]. Operare concretamente applicando le conoscenze di base relative ai vari nuclei [...] ossia padroneggiare i calcoli con sicurezza anche con i numeri razionali nelle loro diverse rappresentazioni; stimare misure di grandezze e risultati di operazioni; valutare la probabilità di eventi nelle situazioni di incertezza (scelte da fare nella vita quotidiana, giochi, ...) [...]. Sostenere le proprie idee, portando esempi e controesempi adeguati e utilizzando concatenazioni di affermazioni e accettare di cambiare opinione riconoscendo le conseguenze logiche di una argomentazione corretta [...]. Riconoscere il ruolo centrale della matematica nella società contemporanea, nelle scienze, nella tecnologia e nella vita quotidiana».

Il giovane adolescente che viene preparato in una simile prospettiva possiede capacità veramente profonde!

Le Indicazioni Nazionali per il secondo ciclo si ispirano alla stessa visione.

«[...] L'insegnamento della matematica offre infine agli studenti uno spazio di inclusione e di crescita personale, dove l'errore non viene considerato un fallimento, bensì un'opportunità di apprendimento e di confronto; dove si può imparare a superare le difficoltà, acquisire fiducia nelle proprie capacità, assumere la responsabilità del proprio apprendimento. In questo contesto, in continuità con le Nuove Indicazioni Nazionali per il primo ciclo, l'apprendimento dell'informatica offre agli studenti un ulteriore strumento formale per descrivere, modellizzare e interpretare la realtà, che risulta indispensabile per comprendere i contesti in cui l'elaborazione automatica delle informazioni svolge un ruolo determinante.»

L'ICMI oggi

Il Progetto Klein dell'ICMI-IMU

Il lavoro dell'ICMI si articola oggi su vari piani. Dopo il terzo *Congresso internazionale sull'Educazione Matematica* (ICME-3) nel 1976, con la partecipazione di 1831 membri provenienti da ottanta paesi, vi fu un'esplosione dell'attività dell'ICMI, diversificata e ampliata con la formazione di gruppi di studio affiliati su vari argomenti, la pubblicazione di quaderni di studio e del bollettino biennale; col conferimento di premi dedicati. Continuano i congressi quadriennali ICME; continua ad aumentare il numero dei paesi rappresentati (attualmente sono novanta). Una immensa documentazione è reperibile in Internet [27].

Ricordo che hanno collaborato nel tempo al lavoro dell'ICMI, in posizioni di responsabilità, molti eminenti matematici italiani, fra cui cito almeno Guido Castelnuovo (1865-1952), Federigo Enriques, Giovanni Vailati (1863-1909), Gaetano Scorza (1876-1939), Guido Ascoli (1887-1957), Pietro Buzano (1911-1993), Lucio Lombardo Radice (1916-1982), Emma Castelnuovo, Gino Loria (1862-1954), Ferdinando Arzarello ([27], [31]). Ricordo anche che Arzarello, presidente dell'ICMI dal 2013 al 2016, ha ricevuto nel 2024 il premio Felix Klein in occasione del XV congresso internazionale dell'ICME a Sydney. Il premio, istituito dall'ICMI, è dedicato a studiosi che durante la loro carriera hanno apportato contributi sostanziali alla ricerca e hanno introdotto nuove questioni, idee, prospettive e riflessioni critiche. Nel ricevere il premio,

Arzarelo ha voluto sottolineare come non si tratti solo di un riconoscimento indirizzato alla sua persona, ma anche di un importante risultato corale della comunità italiana della didattica della matematica.

Il lavoro dell'ICMI si è volto anche all'aspetto dell'aggiornamento degli insegnanti, in modo originale e costruttivo. Traggo le informazioni che seguono dall'articolo di F. Arzarelo, *Il Progetto Klein dell'ICMI-IMU e la trasposizione didattica* [2], che ne dà una esauriente e utile descrizione, e dal sito del progetto: <https://www.mathunion.org/icmi/projects/klein-project>.

«Nel 2008 il Comitato Esecutivo dell'ICMI, d'intesa con l'*International Mathematical Union* (IMU), deliberò l'avvio del *Progetto Klein* al fine di presentare la matematica contemporanea agli insegnanti delle scuole secondarie. [...] Il *Progetto Klein* [...] mira a produrre risorse matematiche per insegnanti di scuola secondaria sulla matematica contemporanea. È inteso come uno stimolo per gli insegnanti di matematica, per aiutarli a stabilire connessioni tra la matematica che insegnano, o che potrebbero essere chiamati a insegnare, e la matematica accademica, tenendo conto dell'evoluzione di quest'ultima nel corso dell'ultimo secolo [...] Si fece strada l'idea di raccogliere alcuni contenuti centrali, aspetti, teoremi, connessioni e spiegazioni della matematica attuale sotto forma di articoli brevi su un sito web. Questi articoli sono stati chiamati *Vignette Klein* (VK).

Le VK hanno lo scopo di dare agli insegnanti un senso di connessione tra la matematica del mondo degli insegnanti e la ricerca e le applicazioni contemporanee nelle scienze matematiche. Tutte dovrebbero avere la stessa struttura, o almeno una struttura simile. Pertanto, ciascuna inizierà con qualcosa con cui l'insegnante ha familiarità e si svilupperà verso una maggiore comprensione della materia attraverso un brano di matematica interessante. Infine, illustrerà un principio chiave della matematica. Una VK è quindi un breve scritto su un singolo argomento matematico; presuppone che il lettore abbia una certa conoscenza matematica di base e almeno la volontà di cimentarsi con la scrittura e la lettura di testi matematici. Le VK non riguardano perciò solo la matematica in senso stretto, ma contengono anche nozioni matematiche significative che probabilmente risulteranno nuove per la maggior parte degli insegnanti delle scuole secondarie e offrono loro una prospettiva sulla matematica attuale [...].

Le VK sono disponibili nel sito del progetto: <https://blog.kleinproject.org>

[...] Ecco un esempio di titoli. Come funziona Google: catene di Markov e autovalori; successioni di Goodstein: la potenza di una deviazione verso l'infinito; matrici e immagini digitali; il teorema enorme; arte e matematica: nodi e inchiostri; come si risolve questa equazione? Osservate le simmetrie!; l'idea alla base della teoria di Galois; [...] il microscopio di Banach per trovare un punto fisso; la legge di Benford: imparare a frodare o a individuare le frodi?; colorazione delle mappe e basi di Gröbner; ricorrenza e induzione; cercare di predire come fluttua una foglia: caos e previsioni; la vendetta degli infinitesimi; [...] calcolatrici, serie di potenze e polinomi di Chebyshev; [...]. In Italia l'interesse del *Progetto Klein* dell'ICMI-IMU per la comunità matematica si manifestò fin dal 2013 con la traduzione in italiano delle *Vignette Klein* fino ad allora prodotte. Nel 2021-22 l'interesse si concretizzò ulteriormente con il *Progetto Klein Italia*, promosso in seno alle attività del Liceo Matematico (<https://www.liceomatematico.it/progetto-klein-italia/>). L'idea di fondo fu di adattare le due vignette, *Le simmetrie passo, passo* e *Matrici e Immagini digitali*, al contesto culturale e istituzionale della scuola italiana, arricchendole di spunti, immagini, attività, ristrutturandole e aggiungendo le metodologie didattiche maturate negli anni in seno alla ricerca in didattica della matematica e inserendo il prodotto nelle attività del Liceo Matematico ([28], [29], [30])».

Concludo queste brevi note col titolo di un intervento di Freudenthal del 1963 [12]: *Enseignement des mathématiques modernes ou enseignement moderne des mathématiques?* Sembra proprio che la risposta, veramente impegnativa, possa essere: insegnamento moderno della matematica, sia antica, sia moderna.

Maria Piera Manara (laureata in Matematica, ha insegnato a vario titolo in corsi universitari di Geometria e di Algebra in diversi atenei)

Indicazioni bibliografiche e sitografiche

- [1] Giuseppe Anichini, Livia Giacardi e Erika Luciano (a cura di), *Bruno de Finetti e l'insegnamento della Matematica. «Dalla Realtà, nella Realtà, per la Realtà»*, La Matematica nella Società e nella Cultura, n. 8 (2015): http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2015_1_8_3.
- [2] Fernando Arzarello, *Il Progetto Klein dell'ICMI-IMU e la trasposizione didattica*, Matematica, Cultura e Società, vol. di Algebra in diversi atenei)10, n. 3 (2025).
- [3] Max Born & Hedwig Born, (1969). In A. Hermann (Ed.), *Der Luxus des Gewissens: Erlebnisse und Einsichten im Atomzeitalter*. Munich. Nymphenburger Verlag.
- [4] Danny Beckers, (2019). *Why to publish on mathematics education so as to be useful? Educational Studies in Mathematics and its founder Hans Freudenthal*. Educational Studies in Mathematics, 101(1)7–17. <https://doi.org/10.1007/s10649-019-9881-4>
- [5] Umberto Bottazzini, Alberto Conte e Paola Gario (a cura di), *Riposte armonie. Lettere di Federigo Enriques a Guido Castelnuovo*, Bollati Boringhieri, 1996 [670 lettere del periodo 1982-1914]: www.federigoenriques.org
- [6] Guido Castelnuovo, *Felice Klein (1849-1925)*, Annali di Matematica, volume III (1926). <https://doi.org/10.1007/BF02418653>
- [7] Bruno de Finetti, *Matematica logico intuitiva*, Cremonese 1944.
- [8] Federigo Enriques, *Questioni riguardanti la Geometria elementare*, Zanichelli, Bologna, 1900. Ediz. successive ampliate, col titolo *Questioni riguardanti le matematiche elementari*: www.federigoenriques.org
- [9] Federigo Enriques, *Matematica*, Enciclopedia Italiana, XXII 1934: www.federigoenriques.org
- [10] Gino Fano, *Sull'insegnamento della matematica nelle università tedesche e in particolare nell'Università di Gottinga*, Rivista di Matematica 4 (1894), p. 170-188: <https://www.asut.unito.it/peano/pdf/riviste/RdM1894.pdf>
- [11] Michael Friedman, Karin Krauthausen (Editors), *Model and Mathematics: From the 19th to the 21st Century*, Springer Nature book, open access, 2022: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-030-97833-4>
- [12] Freudenthal (1963). *Enseignement des mathématiques modernes ou enseignement modernes des mathématiques?*. L'Enseignement Mathématique. 2 (9), 28-44. <https://dspace.library.uu.nl/server/api/core/bitstreams/8ee3ac11-46da-491f-ba67-7faeaaec403/content>
- [13] Hans Freudenthal (1969). *Why to teach mathematics so as to be useful*. Educational Studies in Mathematics. 1, 3-8.

[14] Hans Freudenthal, *Revisiting mathematics education-China lectures*. Dordrecht, Kluwer Academic Publ., 1991.

<https://p4mriunismuh.wordpress.com/wp-content/uploads/2010/08/revisiting-mathematics-education.pdf>

Traduzione italiana di Carlo Felice Manara: *Ripensando l'educazione matematica*. Editrice La Scuola, Brescia, 1994.

[15] Fulvia Furinghetti, Livia Giacardi (Editors), *The International Commission on Mathematical Instruction, 1908-2008: People, Events, and Challenges in Mathematics Education*, Springer, 2023.

[16] Paola Gario, *Quali corsi per la formazione del docente di matematica? L'opera di Klein e la sua influenza in Italia*, La Matematica nella Società e nella Cultura n.1 (2006):

http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2006_8_9A_1_131_0

[17] Livia Giacardi, *Educare alla scoperta. Le lezioni di Corrado Segre alla Scuola di Magistero*, Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, 6-A, n. 1 (2003).

[18] Felix Klein, *Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie*, Mathematische Annalen, 4 (1871) e 6 (1873).

[19] Felix Klein, *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, Deichert, Erlangen 1872. Ristampato con note aggiunte in Mathematische Annalen 43 (1893), 63-100.

Traduzione italiana di Gino Fano, *Considerazioni comparative intorno a ricerche geometriche recenti*, Annali di Matematica pura e applicata, vol. XVII (1889-90). [Ora in *Pristem/storia* n. 7 (2004), a cura di Lorenzo Magnani e Riccardo Dossena].

https://www.bdim.eu/item?fmt=pdf&id=GM_Fano_1890_1

[20] Felix Klein, *Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie*, Lipsia (1895). [Traduzione italiana a cura di F. Giudice: *Conferenze sopra alcune questioni di geometria elementare*, Torino, 1896].

[21] Felix Klein, *Elementarmathematik von höheren Standpunkt aus*, 3 volumi, Berlin (1924-1928).

[22] Marta Menghini, *Le Matematiche elementari da un punto di vista superiore nella formazione degli insegnanti*, Matematica, Cultura e Società, vol. 10, n. 3 (2025)

[23] John Joseph O'Connor and Edmund Frederick Robertson (2000), *Hans Freudenthal*:

<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Freudenthal/>

<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/>

[24] David E. Rowe, *Felix Klein's "Erlanger Antrittsrede". A Transcription with English Translation and Commentary*, Historia Mathematica 12 (1985).

[25] Renate Tobies, (2019). *Felix Klein—Mathematician, Academic Organizer, Educational Reformer*. (È un capitolo del testo [26]).

https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-319-99386-7_1

[26] Weigand, HG., McCallum, W., Menghini, M., Neubrand, M., Schubring, G. (eds) *The Legacy of Felix Klein*. ICME-13 Monographs. Springer, Cham. <https://doi.org/10.1007/978-3-319->

[27] <https://www.icmihistory.unito.it/>

[28] <https://www.mathunion.org/icmi/projects/klein-project>

[29] <https://blog.kleinproject.org>

[30] <https://www.liceomatematico.it/progetto-klein-italia/>

[31] <https://www.mathunion.org/icmi>

[32] www.mim.gov.it/documents/20182/10554370/curricolo_web.pdf/

[33] M. Piera Manara, *Felix Klein: un matematico riformatore*, Nuova Lettera Matematica, n. 11, 2026.

DIRETTORE RESPONSABILE Mario Gargantini
<https://www.ilsussidiario.net/news/emmeciquadro>

Aut. Trib. Milano n. 226 del 24.3.2000
ISSN 2240-0389