

## IL SENSO DELLE OPERAZIONI: INTRODUCIAMO LA DIVISIONE

di Paola Brusati\* e Alessandra Perna\*

*È ancora possibile insegnare l'aritmetica senza necessariamente dover ricorrere a modalità speciali o a strumenti infallibili, bensì mettendo in azione i bambini con tutta la loro persona. Si possono pensare e proporre esperienze adeguate, curando linguaggio e rappresentazioni, in cui, i bambini scoprono e apprendano i significati delle azioni che conducono alle conoscenze aritmetiche.*

\* Docenti di scuola  
Primaria presso l'Istituto  
Culturale "G.Neri" di  
Pogliano Milanese

### Una scelta di metodo: matematica ed esperienza

Nella scuola Primaria l'apprendimento dell'aritmetica rappresenta la parte preponderante del lavoro di Matematica. Quando entrano nella scuola, i bambini generalmente non sono una "tabula rasa", hanno già un "vissuto" matematico, positivo o negativo che sia. Esso è costituito dalle esperienze che, nel proprio contesto di vita e soprattutto, dove c'è, nella scuola dell'Infanzia, mettono i fondamentali "semi" per la formazione dei concetti numerici; in particolare con esperienze nell'azione del conteggio si prepara il concetto di numero naturale. È la scuola ad avere il compito di sviluppare e sistematizzare tali premesse, portando i bambini ad apprendere l'aritmetica, cioè a strutturare il passaggio dal *senso* del numero al *concetto* di numero, concetto che si può considerare raggiunto solo con l'acquisizione delle operazioni sui numeri naturali.

Conquistare il *senso* delle operazioni implica avere compreso e assimilato da una parte i diversi significati delle *azioni* che portano ad addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione, e dall'altra a possedere la loro *struttura operativa*, cioè le regole del calcolo e le loro proprietà formali. Inizia così un percorso di conoscenza matematica fatto di successivi ampliamenti e approfondimenti, che copre i cinque anni, senza essere concluso: il mondo dei numeri naturali è un ambiente straordinariamente ricco, ci sono sempre nuovi aspetti da scoprire e conoscere, come ben sanno anche gli studenti universitari!

Per attuare una didattica significativa ed efficace è fondamentale che non si punti esclusivamente sulle competenze legate all'aspetto formale e operativo (pensiamo alle tanto aborrite tabelline da conoscere a memoria, o allo scoglio delle divisioni a due cifre...), anche se certamente è su di esso che si manifestano con più evidenza difficoltà, ritardi ed errori. Un'idea guida che condividiamo



con Francesco Paoli è ritenere che «la matematica consiste nel ragionare e nel dare un senso alle situazioni. Una strategia basata sulla comprensione funzionerà sempre. Per la memorizzazione dei fatti aritmetici di base ogni approccio che esclude totalmente la comprensione ragionata non può che rivelarsi inefficace».[1]

Per raggiungere con i bambini questa comprensione ragionata, è davvero decisivo valorizzare il metodo dell'*esperienza*. Con questa espressione intendiamo la proposta di modalità di lavoro didattico «in cui l'alunno è attivo, formula le proprie ipotesi e ne controlla le conseguenze, progetta e sperimenta, discute e argomenta le proprie scelte, impara a raccogliere dati, negozia e costruisce significati, porta a conclusioni temporanee e a nuove aperture la costruzione delle conoscenze personali e collettive».[2]

Nel pensare e proporre percorsi che permettano ai bambini di astrarre i contenuti di cui parliamo a partire dalle proprie esperienze, vale la pena di privilegiare l'attività di *risoluzione di problemi*. Il *problem solving* non consiste solo nella trasposizione pratica di quello che si impara, applicandolo in contesti diversi. La risoluzione di problemi è piuttosto un modo privilegiato di attivare l'iniziativa dei bambini nell'apprendere nuovi contenuti, stimolandoli ad esplorare le situazioni senza lasciarsi intimorire da ciò che non conoscono ancora, a ipotizzare, proporre e verificare modalità di azione per la loro risoluzione, fino a identificare strategie convincenti ed efficaci: si lavora in modo libero e cooperativo, permettendo ai bambini di avanzare proposte e cercare soluzioni.

Usare problemi stimolo per introdurre i concetti aritmetici come le operazioni, può richiedere un tempo abbastanza disteso, ma si dimostra una buona pratica didattica fondata sulla comprensione, la creatività e l'iniziativa, tutti aspetti molto importanti per l'organizzazione del pensiero che porta all'argomentazione matematica.

In questo articolo è proposto e descritto il resoconto di una esperienza condotta da due insegnanti in due classi terze dell'Istituto Culturale "Giuseppe Neri" di Pogliano Milanese nell'anno scolastico 2022-2023, per introdurre la divisione. In questo percorso, le docenti, motivate dal desiderio che i bambini facessero un'esperienza di apprendimento realmente significativa, sono state ispirate dalla stabile collaborazione che già avevano sperimentato con l'Associazione MA.P.E.S., che le ha supportate, costruendo un confronto continuato del loro lavoro attraverso la condivisione dei loro *diari di bordo*. Una modalità di collaborazione che ha permesso alle insegnanti stesse di fare una personale esperienza positiva di didattica condivisa, riflessa e valutata, favorendo così anche la loro maturazione professionale.

### **Introduzione alla divisione: primi passi**

Se l'addizione è un'operazione il cui significato è già – quasi per tutti - spontaneamente annidato nel pensiero dei bambini insieme all'intuizione numerica, più lungo, articolato e complesso è l'incontro con la *moltiplicazione*. E in riferimento a entrambe le due operazioni fondamentali dell'aritmetica, ancora più laborioso e talvolta difficile è l'incontro con le due operazioni *inverse*, sottrazione e divisione: sappiamo che proprio quest'ultima rappresenta uno dei territori di maggiore difficoltà per alunni e insegnanti nella scuola Primaria, perciò una prima scelta didatticamente rilevante è sforzarsi di fondare con chiarezza e profondità anzitutto l'acquisizione della moltiplicazione.

Per tutta la seconda le due insegnanti avevano lavorato sulla struttura moltiplicativa, presentando le tabelline con situazioni coinvolgenti. Non avevano poi perso varie occasioni favorevoli per far riflettere i bambini sulle idee che portano alla divisione: dividersi in squadre, distribuire i quaderni, fare a metà la propria merenda con un amico, preparare sacchetti di caramelle... esperienze che si presentano a ogni bambino.

La terza è cominciata con una attività giocosa a classi unite in giardino, pensata per permettere di riprendere la moltiplicazione e i suoi significati, senza essere un banale "ripasso" delle tabelline.

È stato chiesto ai bambini di formare dei gruppi seguendo le indicazioni delle maestre, e via via di distribuirsi, suddividersi, raggrupparsi in modo diverso, per risolvere delle sfide che si lanciavano loro. Per esempio, con un lavoro che ha impegnato per più lezioni, si è chiesto a 18 bambini di mettersi in gruppi da 6 e di raccogliere in un certo tempo il maggior numero possibile di sassi; poi di formare 6 gruppi e inventare una piccola filastrocca. Con 24 bambini, si chiedeva di rag-grupparsi per 2, 3, 4, 6, 8, 12, 1, 24 per fare alcune prove motorie (saltare su un piede, saltare a piedi uniti, ...). Successivamente, in classe i bambini dovevano raccontare quanto avvenuto in giardino con un disegno e con le parole, e i disegni venivano poi condivisi, le insegnanti sollecitavano il dialogo costantemente chiedendo "perché hai fatto così?".

Questa coinvolgente attività ha permesso di fare dall'inizio esperienza dei due aspetti della divisione, la *distribuzione* e la *contenenza*, e i bambini senza particolare fatica sono stati capaci di rappresentare in modo diverso le due situazioni, che avevano acquistato senso per loro. In una grande tabella dovevano poi essere riportati, per ogni gioco, il numero delle squadre in cui la classe era suddivisa e il numero dei giocatori di ogni squadra [3]. Si veda Figura 1.

I bambini l'hanno spontaneamente messa in relazione con la tavola pitagorica, intuendo che questa importante rappresentazione della moltiplicazione evidenzia significativamente la *scomposizione di un numero in fattori*, anche in più modi.

Ci si avvicina così alla divisione come procedimento inverso alla moltiplicazione, cioè come ricerca di due numeri, che moltiplicati, diano il numero dato.



Figura 1

Dal Dizionario di Stella Baruk [4]:

«Come l'addizione, la sottrazione e la moltiplicazione, una divisione rientra fra le operazioni, cioè è un'azione effettuata su due oggetti (due numeri) per ottenerne un terzo; tuttavia l'esistenza di quest'ultimo non è necessariamente assicurata. La divisione si può definire come operazione inversa della moltiplicazione. La divisione di numeri naturali, considerata come operazione inversa della moltiplicazione, non comporta un resto: o il quoziente esiste e non c'è resto o non esiste.

Se esiste il quoziente tra due numeri, la divisione è definita, ma è essenziale, per avere la certezza che il quoziente esiste, sapere con quale sistema di numeri si ha a che fare.

Es.  $35 : 4$  non è definita nei numeri naturali, ma è definita nei numeri decimali».

Per passare poi a lavorare sulla divisione attraverso *problemi stimolo*, le maestre hanno iniziato raccontando semplici storie riguardanti questioni reali, in situazioni diverse, legate alle azioni di *suddividere* in parti uguali o di *distribuire*, senza esplicitare la domanda, ma chiedendo dapprima soltanto di ridirne il contenuto con le parole o i disegni. Anche se non si parlava ancora di "problema", attraverso il disegnare liberamente la situazione sul quaderno, i bambini riflettono sul testo e ne colgono il significato, individuano la nuova "azione" di cui parla. Alcuni hanno spontaneamente iniziato a parlare di "diviso" (scrivendo anche il segno!).

Successivamente, le maestre hanno chiesto ai bambini di proporre loro una situazione in cui fosse richiesta la stessa azione, e di farne la rappresentazione. I bambini si sono sbizzarriti, inventando anche situazioni complesse, mostrando in questo grande inventiva e modalità molto personali. I disegni fatti venivano poi sempre discussi insieme, così hanno scoperto che alcuni modi di rappresentare raccontano in modo più chiaro, efficace, conveniente rispetto ad altri. Tali disegni

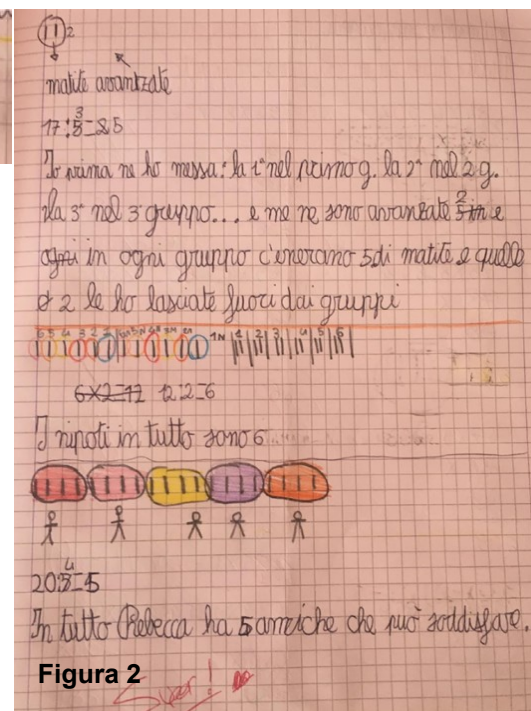
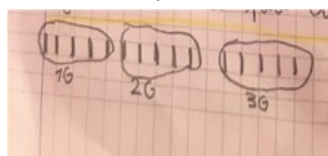


Figura 2

diventavano via via forme di rappresentazione che venivano fatte proprie dai compagni, senza imporle, ma proponendole a tutti, rispettando sempre i tempi di ogni bambino. È da sottolineare l'importanza di chiedere di *rappresentare il contesto*, senza imporre specifiche forme di schematizzazione (queste saranno eventualmente accettate più avanti, quando la chiarezza del senso permetterà di dominare calcoli e situazioni più complessi) ma permettendo ai bambini di sostenere anche con il disegno l'immaginazione di "ciò che avviene" nel contesto.

La rappresentazione diventa il modo per "risolvere" la situazione, anche se non l'abbiamo chiamata "problema" e se non si è esplicitata una domanda: infatti, nel procedere la domanda piano piano emerge comunque, così come compare l'operazione che risolve la questione, che chiamiamo divisione, anche se non se ne conosce l'algoritmo.

**Figura 3**

*Paola racconta:*  
Una ditta di dolci produce 93 biscotti e li dovrà distribuire in 3 scatole in parti uguali.

*Paola dice:* "ho pensato anche alla tabellina del 3 e poi me ne rimanevano 3 e ho fatto 1, 1 e 1"

*Paola racconta:*  
Produce 93 biscotti e li distribuisce in 3 scatole da mandare in quantità uguali.

*Luca racconta:* "a mente ho fatto 30 + 30 + 30 che faceva 90 e poi me sono rimasti 3 che potevo mettere ognuno in una scatola!"

$30 + 30 + 30 = 90$   
 $93 - 90 = 3$   
3 DOLCI CHE AVANZANO  $3 - 1 - 1 - 1$   $31 + 31 + 31 = 93$

*super Brava!*

Dopo un po' alcuni negozi chiedono altri b. Produce poi 75 biscotti da distribuire in 3 scatole SEMPRE IN PARTI UGUALI.

$20 + 20 + 20 = 60$   
 $75 - 60 = 15$   
 $15 = 5 + 5 + 5$   
 $20 + 5 = 25$   $25 + 25 = 50$   $50 + 25 = 75$

*super Brava!*

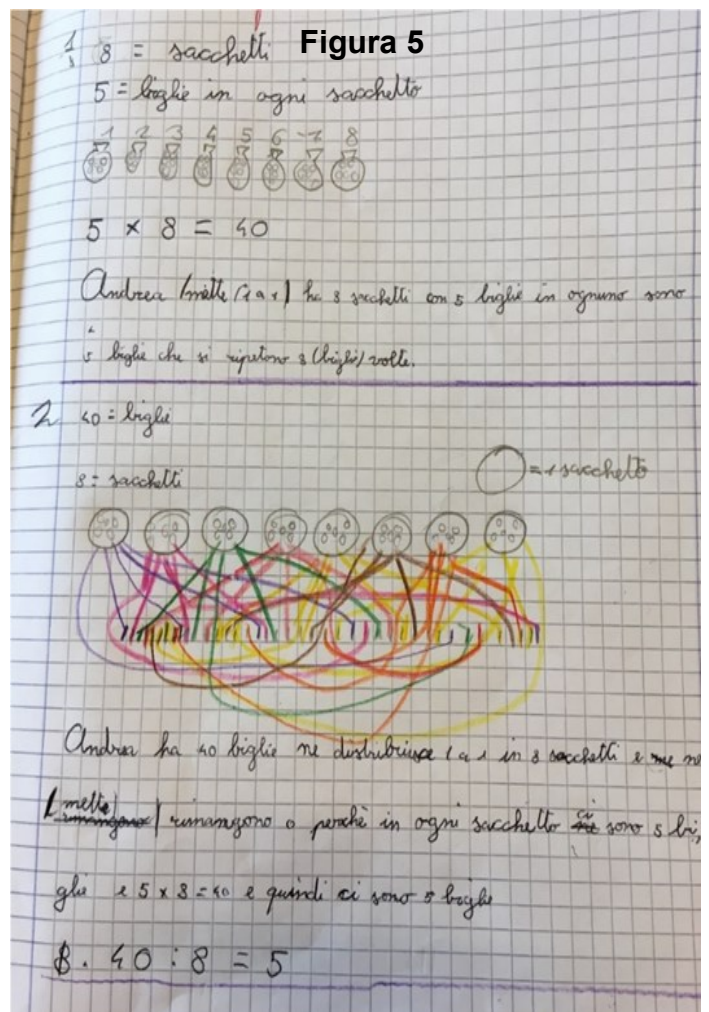
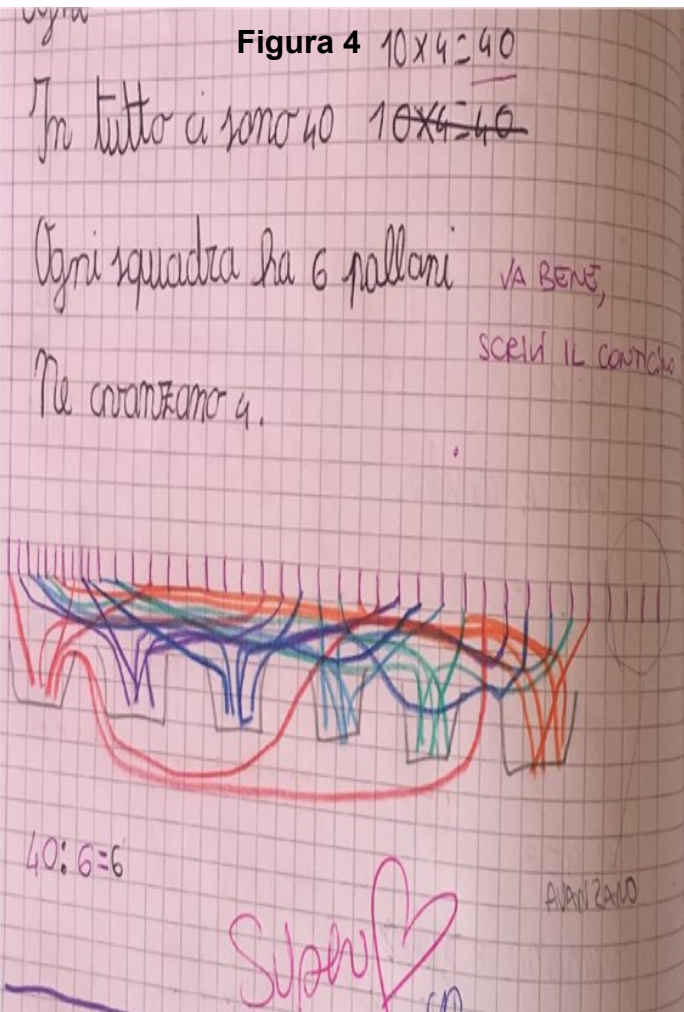
Questa modalità di lavoro permette ai bambini di procedere per tentativi e approssimazioni, come anche di riflettere su eventuali errori e di controllare e correggere i ragionamenti, scegliendo le forme simboliche in cui dominare numeri anche non piccoli.

Inoltre, si incontrano facilmente situazioni in cui occorre tenere conto del *resto* della divisione: si sono presentati diversi tipi di problemi con divisioni anche con l'avanzo, senza necessariamente preparare prima i bambini, ma osservando le loro rappresentazioni ed i loro pensieri, accettando tutte le soluzioni, motivate con la maestra, poi spiegate e confrontate con quelle dei compagni. Ciò ha permesso di familiarizzare con la situazione più complessa che riguarda la divisione: quando l'operazione "è possibile" e cosa questo significa.

Un esempio inventato da loro: (Figura 4).  
*La maestra di motoria Daniela ha 40 palloni (trovati dal problema precedente: ci sono 10 ceste con dentro 4 palloni ciascuna). Daniela vuole dare lo stesso numero di palloni alle 6 squadre che giocano. Quanti palloni avrà ciascuna squadra? Ne avanza qualcuno?*

Ancora con problemi, dapprima con numeri piccoli, poi aumentando la complessità – per introdurre gradualmente la necessità dell'algoritmo di calcolo - si mettono in parallelo situazioni di moltiplicazione e divisione una inversa dell'altra, come in questo esempio (Figura 5):

- 1) Andrea ha 8 sacchetti, in ogni sacchetto ha messo 5 biglie. Quante biglie ha in tutto?
- 2) Andrea ha 40 biglie, le suddivide in parti uguali in 8 sacchetti. Quante biglie mette in ciascun sacchetto?

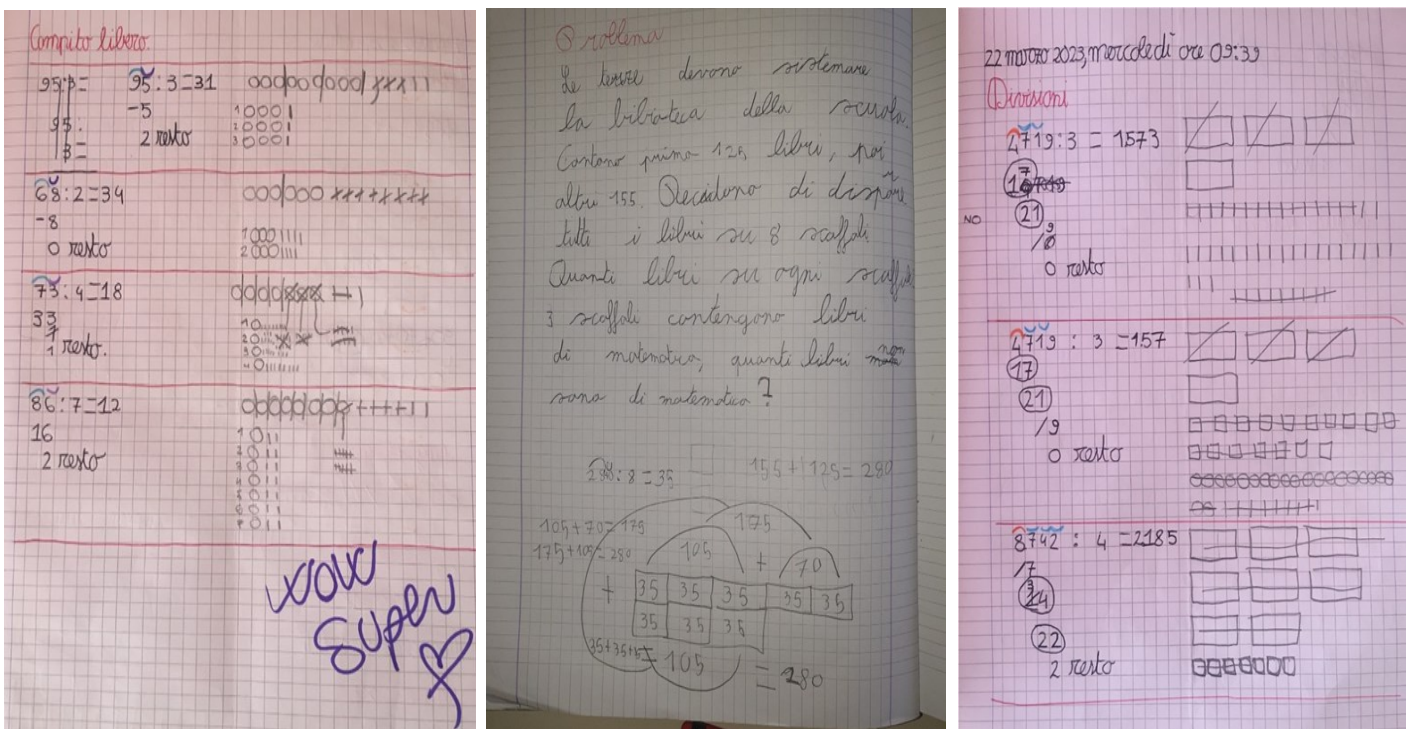


**Nuove tappe: entra il calcolo**

Si può così ritenere maturo il tempo per affrontare le ultime tappe di questo percorso didattico ricco e significativo, in cui dall'esperienza, passando dalla rappresentazione, arriviamo alla *formalizzazione di un procedimento operativo*. In sintesi, fino a qui il lavoro ha compreso:

- esperienze con il corpo e con i giochi per entrare nel mondo dei numeri "allegrementemente"
- ripasso delle tabelline per riannodare e rinforzare le acquisizioni pregresse (moltiplicazione e addizione)
- uso di strutture narrative per introdursi a diversi contesti in modo immersivo
- incontro con problemi sulla struttura moltiplicativa in cui interviene la procedura inversa, che porta alla divisione
- problemi e rappresentazioni con piccole quantità

Le rappresentazioni che sono state richieste dalle maestre e prodotte dai bambini hanno avuto la funzione essenziale di *chiarificare l'azione* a cui si riferisce la situazione e *il dato* su cui verte la domanda. Passando da quelle personali preferite inizialmente a quelle motivate e argomentate nel confronto con la maestra e nella discussione tra i bambini, è stato anche possibile giungere gradualmente a identificare alcune rappresentazioni più significative, che consentono di identificare *strategie di calcolo*, quando i numeri diventano più grandi, e i problemi sono sempre più ricchi, perciò si rende necessario dare un ordine al lavoro, utilizzando schemi e cifre, come in questi altri esempi (Figura 6). A questo punto, proponendo ancora problemi con divisioni che coinvolgessero numeri oltre la tavola pitagorica, si è affrontata la necessità del calcolo e introdotto l'*algoritmo* della divisione, giungendo anche a presentare la divisione in colonna.



**Figura 6**

A questo punto, proponendo ancora problemi con divisioni che coinvolgessero numeri oltre la tavola pitagorica, si è affrontata la necessità del calcolo e introdotto l'*algoritmo* della divisione, giungendo anche a presentare la divisione in colonna.

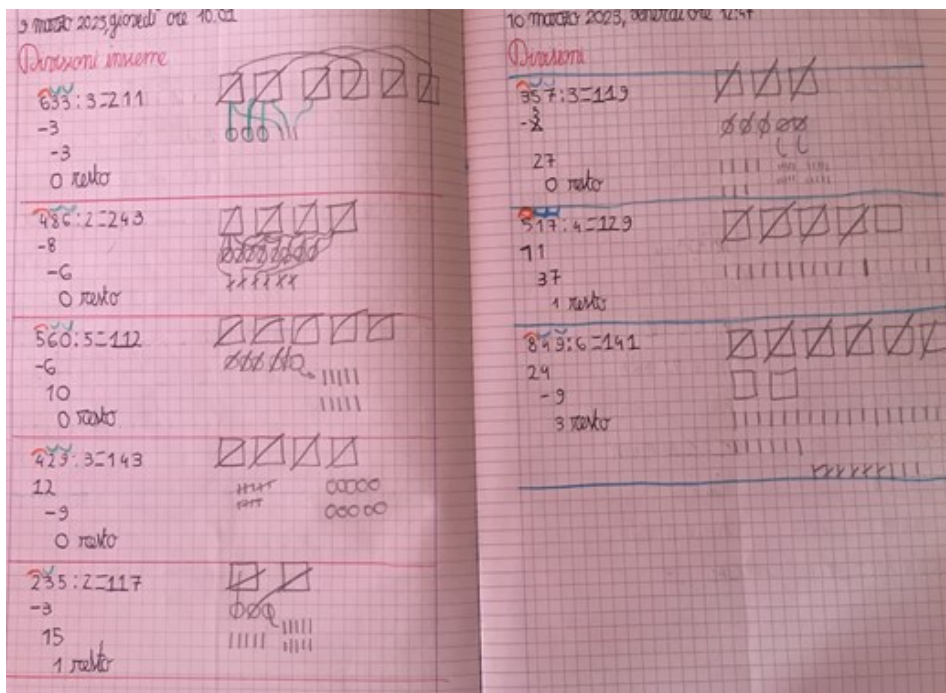


Figura 7

In queste immagini si nota come la presentazione dell'algoritmo è stata fin da subito accompagnata dalla rappresentazione del dividendo, passaggio che è stato chiesto dai bambini stessi, perché li aiutava a vedere meglio il numero così da dividerlo con maggiore agilità (Figura 7).

### Alcune considerazioni didattiche

Abbiamo potuto osservare un confronto con le classi dei cicli precedenti, nelle quali l'approccio alla divisione era stato più tradizionale e formale. L'aver proposto molte situazioni in cui operare con numeri, aver lasciato provare a muoversi e operare, ha permesso di affrontare l'operazione con una base solida da cui partire, tanto che i bambini hanno dimostrato senz'altro maggiore sicurezza nell'utilizzare l'algoritmo della divisione.

È stata per noi la conferma che i passi richiesti ai bambini che abbiamo descritto sono stati i passi che servono a diventare consapevoli del processo. In particolare il lavoro sulla rappresentazione, che può apparire sovrabbondante - tanto che noi stesse talvolta ci interrogavamo sul tempo che abbiamo dedicato-, siamo invece in grado di riconoscerlo come particolarmente prezioso.

La rappresentazione in forme non predefinite aiuta il passaggio alla simbolizzazione con i segni della matematica, di conseguenza aiuta a impadronirsi anche del calcolo e delle regole.

Continuare a discutere con i bambini del loro lavoro richiede tempo e spesso fatica, ma porta i bambini anche a rielaborare il testo dei problemi e a impadronirsi del senso dei dati numerici e dell'uso eventuale delle marce: un "vantaggio collaterale" anche sul piano linguistico!

Infine, la modalità di lavoro che il MA.P.ES. propone ha permesso una guida e un confronto continuo tra docenti esperti e docenti che sperimentavano, che ha consentito di chiarirci costantemente il fondamento e il contenuto delle scelte che di volta in volta si mettevano in atto. Così come ha indicato anche un modo nuovo e significativo di osservare, guardare e “leggere” i lavori dei bambini e le loro riflessioni, identificando i loro passi e comprendendo l’origine dei loro errori.

*Paola Brusati, Alessandra Perna*

*Docenti di scuola Primaria presso l’ Istituto Culturale “G.Neri” di Pogliano Milanese. L’esperienza è stata presentata al convegno dell’Associazione MA.P.ES. il 14 ottobre 2023.*

#### **Note**

- [1] Francesco Paoli, *Didattica della matematica dai tre agli undici anni*, Carocci, Roma 2014
- [2] Indicazioni Nazionali 2012
- [3] AA. VV., *Fare matematica*, Pearson, Milano 2015 pagg. 108-109
- [4] Stella Baruk, *Dizionario di matematica elementare*, Zanichelli, Bologna 1998