EMMECI quadro
Scienza Educazione E Didattica

n. 86
gennaio 2024

MATEMATICA E SISTEMI ELETTORALI:
IL CASO DEL GERRYMANDERING

*di Giancarlo Travaglini**

** Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università di MilanoBicocca.*

L'uso spregiudicato del gerrymandering è uno dei problemi ricorrenti nel funzionamento della democrazia negli Stati Uniti. È un problema politico, giuridico, matematico, statistico e informatico allo stesso tempo.
Vengono indicate due linee delle linee su cui si muovono i tentativi di definire (e quindi riconoscere) il gerrymandering.

The Winner Takes It All
(ABBA. Album: Super Trouper, 1980)

Il termine (partisan) gerrymandering si riferisce alla manipolazione di distretti elettorali allo scopo di avvantaggiare un partito politico. Stiamo parlando di un sistema elettorale maggioritario, nel quale il paese e diviso in distretti elettorali, ciascuno dei quali elegge a maggioranza un rappresentante, che dovrebbe agire a nome e nell'interesse del distretto che lo ha eletto. Il gerrymandering e un problema particolarmente serio riguardo all'elezione della Camera dei Rappresentanti degli Stati Uniti (cioè la camera bassa del Congresso), per la quale devono essere eletti 435 membri. Come esempio, assumiamo che il paese abbia 50 votanti, di cui 30 fedeli al Partito Quadrato e 20 fedeli al Partito Rotondo. Supponiamo che tutti votino e che il paese debba essere diviso in 5 distretti elettorali, con 10 elettori ciascuno. In un sistema elettorale proporzionale il Partito Quadrato avrebbe il 60% dei voti (dunque 3 rappresentanti) e il Partito Rotondo avrebbe il 40%. Nella Figura 1 vediamo a confronto i risultati di tre diverse scelte della suddivisione del paese in 5 distretti. Nel Piano 1 ogni partito ha la percentuale di rappresentanti (3 per il Partito Quadrato e 2 per il Partito Rotondo) uguale alla sua percentuale di voti. Il Piano 2 e il «sogno del Partito Quadrato», che ottiene tutti e 5 i rappresentanti. Il Piano 3 e il «colpaccio del Partito Rotondo», che ottiene 3 rappresentanti e ha quindi, contro tutte le aspettative, la maggioranza nel paese.

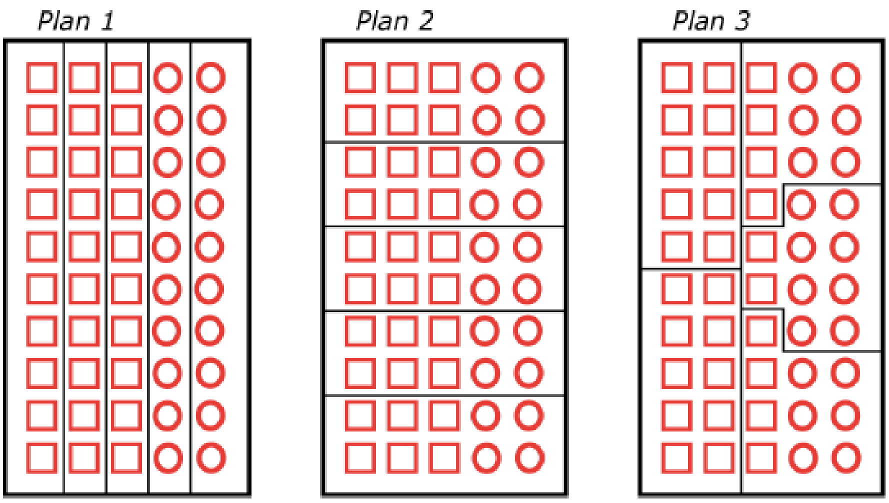

FIGURA 1. Diverse configurazioni dei distretti posso dare risultati differenti.

Il Piano 2 e il Piano 3 sono esempi (con esiti opposti) di gerrymandering.

La tentazione del gerrymandering appare nel momento in cui devono essere ridefiniti, dalle autorità dello stato, i confini dei distretti elettorali (negli Stati Uniti avviene ogni 10 anni, dopo il censimento, con regole che variano da stato a stato).

Supponiamo che per le prossime elezioni sia prevista una distribuzione di voti quadrati e rotondi localizzata come nella Figura 1. Se al governo si trova il Partito Quadrato, sarà tentato di suddividere i distretti elettorali come nel Piano 2, mentre se al governo si trova il Partito Rotondo, la tentazione del Piano 3 sarà forte.

L'obiettivo del gerrymandering è *sprecare i voti del partito avversario*. Questo può essere fatto in due modi.

- **convogliando i voti del partito avversario in inutili "supermaggioranze"**, vedi i due distretti a sinistra nel Piano 3.
- **sprecando i voti del partito avversario su candidati perdenti**, vedi i cinque distretti nel Piano 2 e i tre distretti a destra nel Piano 3.

La nascita del termine "gerrymandering" risale al 1812, quando il Boston Gazette pubblicò una vignetta (vedi la Figura 2) che mostrava con una rappresentazione suggestiva i contorni contorti di un distretto elettorale del Massachusetts. In questi contorni si vedeva, con un po' di fantasia, la forma di un mostro o di una salamandra (*salamander* in inglese), e poiché erano il frutto delle modifiche introdotte dal Governatore Elbridge Gerry[1], nacque il termine *gerry-mander*.

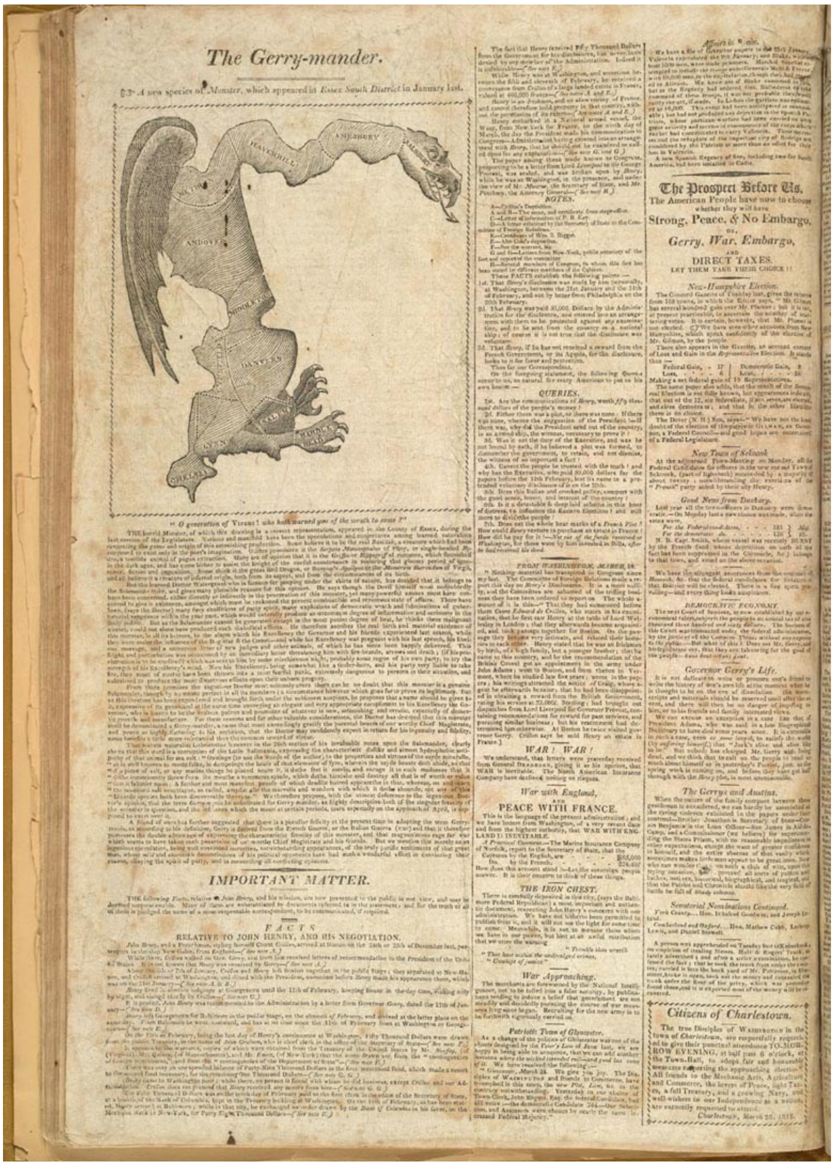
The Gerry-mander.
A new species of Monster, which appeared in Essex South District in January last.
IMPORTANT MATTER.
FACTS
RELATIVE TO JOHN HENRY, AND HIS NEGOTIATION.
NOTES.
QUERIES.
WAR! WAR!
PEACE WITH FRANCE.
THE IRON CHEST.
The Prospect Before Us.
The American People have now to choose whether they will have
Strong, Peace, & No Embargo,
or,
Gerry, War, Embargo,
and
DIRECT TAXES.
New-Hampshire Election.
Good News from Duxbury.
DEMOCRATIC ECONOMY.
Governor Gerry's Life.
The Gerrys and Austins.
Citizens of Charlestown.

FIGURA 2. Boston Gazette, 1812.

FIGURA 3. Elbridge Gerry.

[1]Elbridge Gerry (Figura 3) è stato un membro del partito Democratico-Repubblicano e uno dei firmatari della Dichiarazione di Indipendenza. Negli ultimi anni della sua vita è stato il vice-Presidente degli Stati Uniti.

Nel 2019 la Corte Suprema degli Stati Uniti (Rucho et al. v. Common Cause et al.[6]) ha stabilito che la Corte non ha il diritto di intervenire sul problema del gerrymandering, pur dichiarando che la pratica del gerrymandering è incompatibile con i principi democratici. Cioè l'incompatibilità con i principi democratici non significa automaticamente incompatibilità con la Costituzione. Il problema deve quindi essere affrontato all'interno dei singoli stati[2] .

La Corte era chiamata a pronunciarsi su due opposti ricorsi per gerrymandering: nel primo i querelanti erano cittadini del North Carolina e denunciavano discriminazioni contro il Partito Democratico, nel secondo venivano denunciate discriminazioni contro il Partito Repubblicano nel Maryland. È interessante leggere la presentazione dei due casi nella sentenza della Corte Suprema [6].

Nel caso del North Carolina si legge:

> I legislatori Repubblicani hanno istruito i loro cartografi nell'usare i dati politici per ottenere una mappa che producesse una delegazione congressuale di 10 Repubblicani e 3 Democratici. ... Come dichiarato da uno dei due Repubblicani che controllavano la commissione: "Io penso che eleggere i Repubblicani sia meglio che eleggere i Democratici. Quindi ho disegnato la mappa per contribuire a promuovere ciò che credo meglio per il paese".

Nel caso del Maryland si legge:

> L'allora Governatore Martin O'Malley ... ha testimoniato che il suo scopo era "usare la ridisegnazione dei distretti per cambiare la composizione complessiva della delegazione congressuale del Maryland in 7 Democratici e 1 Repubblicano, modificando un distretto. Si decise di agire sul Sesto [Distretto], che era stato tenuto dai Repubblicani per quasi due decadi. ... Il piano del 2011 si realizzò spostando circa 360.000 votanti fuori dal Sesto Distretto e inserendone 350.000 nuovi."

Successivamente la Corte Suprema è tornata più volte, con maggioranze diverse, su problemi legati al gerrymandering. Vedi ad esempio [7].

[2]La decisione è stata presa a maggioranza (5-4) e in [6] si può leggere anche la dichiarazione, fortemente critica, della minoranza

La Figura 4 mostra le mappe di alcuni distretti elettorali, negli Stati Uniti, che sembrano casi moderni di gerrymandering, evidenziati in un articolo del Washington Post [4], dove leggiamo:

> La compattezza di un distretto – una misura di quanto irregolare è la sua forma, determinata dal quoziente tra l'area del distretto e l'area di un disco con lo stesso perimetro[3] – può essere un'utile indicazione di quanto [la forma di] quel distretto è frutto di gerrymandering. I distretti che hanno una forma generalmente regolare tendono ad essere compatti, mentre quelli che hanno molti "ghirigori", diramazioni e protuberanze tentacolari hanno un risultato scadente, secondo questa misurazione.

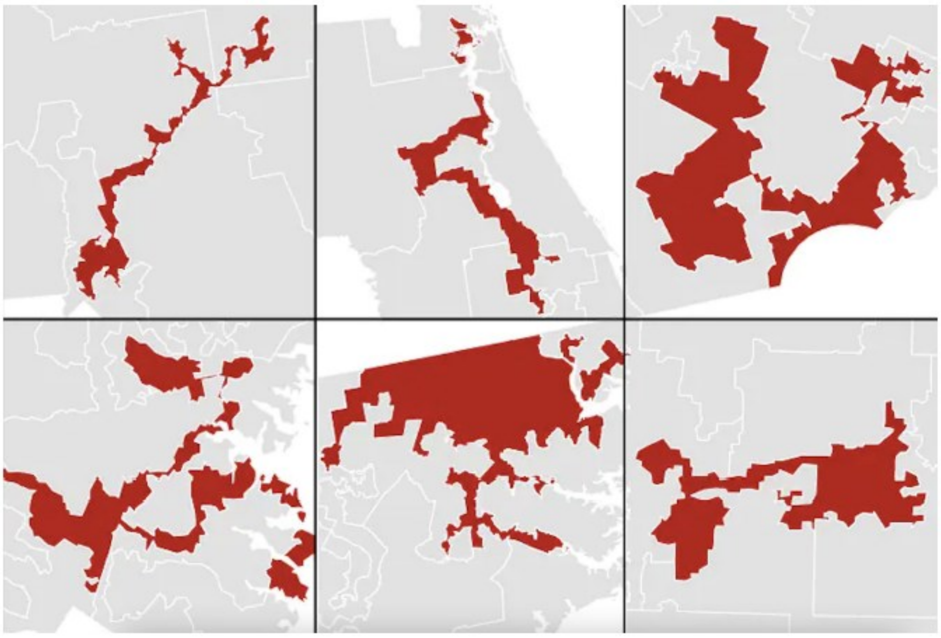

FIGURA 4. Immagini moderne di gerrymandering (dal Washington Post).

Il commento del Washington Post sulla compattezza è forse un po' ottimista, e pone la domanda su eventuali condizioni geometriche che permettano di definire a priori il gerrymandering.

Individuare con criteri geometrici il gerrymandering "intenzionale" non sembra però facile. La proposizione seguente (vedi [5]) mostra che il gerrymandering non è necessariamente associato a "forme strane".

Proposizione 1. *Siano $n < r$ interi positivi e poniamo $8n$ quadrati piccoli e $8r$ quadrati grandi in un poligono convesso B, in modo che nessuna retta tocchi tre quadrati. Allora è possibile suddividere B in otto poligoni convessi in ciascuno dei quali il numero dei quadrati grandi è maggiore del numero dei quadrati piccoli (e quindi si crea una situazione di gerrymandering simile a quella del Piano 2).*

[3]Questa non è la definizione di *compattezza* in Matematica

In altre parole, supponiamo che i quadrati piccoli siano gli elettori del Partito QP, e i quadrati grandi siano gli elettori del Partito QG. Allora è possibile suddividere il poligono B, che rappresenta il paese, in otto poligoni convessi in modo che i quadrati piccoli e grandi si suddividano proporzionalmente, dando così al partito QG la vittoria in tutti i distretti.

Dimostrazione. Tracciamo due rette parallele: la retta più spessa separa l'insieme dei quadrati grandi a metà, la retta più sottile separa l'insieme dei quadrati piccoli a metà. Se le due rette non coincidono,

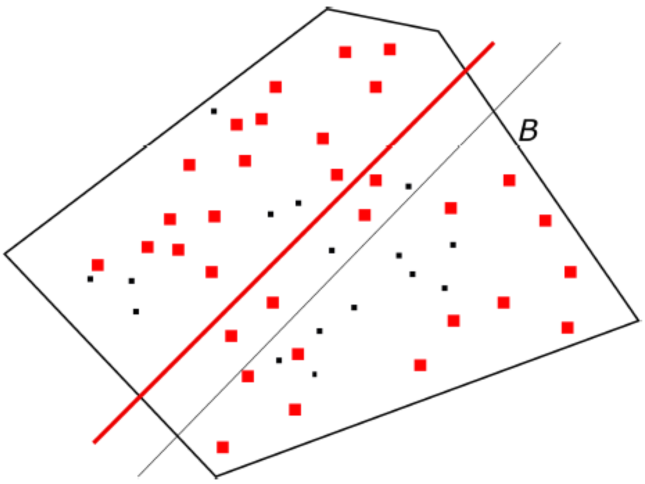

FIGURA 5. È possibile creare gerrymandering disegnando distretti che sono poligoni convessi

iniziamo a ruotarle (ad esempio in senso orario), mantenendole parallele e chiedendo che ciascuna di esse separi sempre a metà il suo insieme di quadrati. Dopo una rotazione di 180º ciascuna retta torna sostanzialmente nella sua posizione originaria. Poiché hanno fatto solo mezzo giro, ad un certo punto le due rette parallele devono essersi sovrapposte. Quindi esiste una retta che separa a metà sia i quadrati grandi, sia i quadrati piccoli. Chiamiamo B_1 and B_2 i due poligoni in cui questa retta ha suddiviso B. Ciascuno di essi contiene $4n$ quadrati piccoli e $4r$ quadrati grandi. Ripetiamo la costruzione precedente e suddividiamo B_1 and B_2 in poligoni più piccoli, contenenti ciascuno $2n$ quadrati piccoli e $2r$ quadrati grandi. Ancora un passo (analogo ai precedenti) e la dimostrazione è terminata.

Il gerrymandering non sembra quindi ridursi ad un problema geometrico, e richiede la collaborazione di matematici, statistici, avvocati, scienziati della politica, e informatici. Suggeriamo di leggere la dichiarazione congiunta dell'American Mathematical Society e dell'American Statistical Association pubblicata nel 2018, in vista della ridefinizione dei distretti elettorali, prevista per il 2020. Vedi [1].

Accenniamo ora a due delle linee su cui si muovono i tentativi di definire (e quindi riconoscere) il gerrymandering. Vedi [3].

Divario di efficienza (Efficiency gap)

Contiamo per ciascun partito il numero totale dei voti "inutili", cioè dei voti dati in distretti in cui ha vinto l'altro candidato, oppure, quando ha vinto il proprio candidato, dei voti oltre il 50% dei voti +1. L'idea è che in una situazione equa i due partiti ottengano sostanzialmente lo stesso numero di voti inutili.

Immaginiamo un distretto con P votanti, dove tutti votano uno dei due partiti (che chiamiamo Partito A e Partito B). Supponiamo che il Partito A (vincitore) prenda X_A voti e il Partito B (perdente) prenda $X_B = P - X_A$ voti. Quindi $X_A > X_B$ e il Partito A colleziona (pensiamo per semplicità P pari)

$$X_A - \left(\frac{P}{2} + 1\right) = \frac{X_A - X_B}{2} - 1$$

voti inutili, mentre il perdente si ritrova con $X_B = P - X_A$ voti inutili. Chiamiamo *divario di efficienza* (per il Partito A, nel caso di B cambiamo il segno) la differenza dei numeri dei voti inutili, divisa per P. Cioè il numero

$$\frac{X_A - (\frac{P}{2} + 1) - (P - X_A)}{P} = \frac{2}{P} X_A - \frac{3}{2} - \frac{1}{P} .$$

Il conto precedente mostra che il divario di efficienza è vicino a 0 quando il numero X_A di voti ottenuti dal Partito A è vicino ai 3/4 del totale P.

Consideriamo ora N distretti $D_1, \ldots, D_N$, ciascuno con P votanti. Supponiamo che tutti gli elettori votino, e siano il Partito A e il Partito B le uniche scelte possibili. Nel generico distretto D_j siano rispettivamente X_j e S_j il numero di voti e il numero di seggi ottenuti dal Partito A. Quindi S_j vale 1 in caso di vittoria e 0 in caso di sconfitta. Allora il numero di voti inutili per il Partito A nel distretto D_j è

$$\left.\begin{array}{ll} X_j & \text{se } A \text{ perde nel distretto } D_j, \\ X_j - (\frac{P}{2} + 1) & \text{se } A \text{ vince nel distretto } D_j, \end{array}\right\} = X_j - S_j \left(\frac{P}{2} + 1\right) .$$

Analogamente, il numero di voti inutili per il Partito B nel distretto D_j è

$$P - X_j - (1 - S_j)\left(\frac{P}{2} + 1\right) .$$

Sommando su tutti i distretti e dividendo per NP otteniamo il divario di efficienza (per il Partito A):

$$\frac{1}{NP}\sum_{j=1}^{N}\left(X_j - S_j\left(\frac{P}{2}+1\right) - \left[P - X_j - (1-S_j)\left(\frac{P}{2}+1\right)\right]\right)$$
$$= 2x - s - \frac{1}{2} + \frac{1-2s}{P}\ ,$$

dove $x = \frac{1}{NP}\sum_{j=1}^{N} X_j$ e $s = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} S_j$ sono rispettivamente la percentuale di voti e la percentuale di seggi ottenute globalmente dal Partito A. Quindi, se P è grande, il divario di efficienza si avvicina a 0 se

$$s \approx 2x - 1/2\ .$$

Osserviamo che in un sistema idealmente proporzionale dovremmo avere $s = x$, e non $s = 2x - 1/2$.

Nel caso della Figura 1 il Partito Quadrato ha divario di efficienza $+8\%$ nel Piano 1, -30% nel Piano 2, e $+22\%$ nel Piano 3 (un divario di efficienza fortemente negativo significa che è stato il Partito B a sprecare molti voti, ed è quindi un vantaggio per il Partito A).

Il Divario di efficienza è stato introdotto da N. Stephanopoulos e E. McGhee in [8]. Nel 2018 (quindi prima della sentenza del 2019 che ha demandato il problema alle corti statali) è stato usato dalla Corte Suprema per deliberare su un caso di gerrymandering (vedi [9]).

Campionamento di insieme (Ensemble sampling)

Un approccio diverso, più complesso, ma più "ritagliato" sul singolo stato, è dato dal *campionamento di insieme.*

L'idea è di considerare tutte le possibili suddivisioni in distretti aventi un numero sostanzialmente uguale di elettori e soddisfacenti le condizioni specifiche dello stato. Il numero di queste suddivisioni è enorme, di fatto intrattabile. Poi si estrae in modo casuale un numero elevato ma trattabile di configurazioni dei distretti, ad esempio qualche decina di migliaia (l'estrazione casuale delle mappe è la parte più difficile). Successivamente si calcola il risultato delle elezioni conseguente a ciascuno di questi campionamenti. Si pone quindi sui campionamenti una misura di probabilità e si confronta il risultato elettorale che sarebbe stato ottenuto sui campionamenti con il risultato reale. In questo modo l'eventuale gerrymandering dovrebbe essere evidenziato dal confronto con designazioni casuali dei distretti elettorali, non motivate da interessi di parte.

Il campionamento di insieme è stato introdotto in [2] da J. Chen e J. Rodden che, come Stephanopoulos e McGhee, non sono matematici, ma studiosi di Legge o Scienze Politiche.

Qui, come spesso accade in Matematica, il problema è dunque trovare una definizione accettabile di una famiglia di oggetti che già *vediamo*. Per il gerrymandering la situazione è però più delicata, poiché non stiamo muovendoci in un ambito matematico. E, come scrive, con un pizzico di ironia, J. Ellemberg in [3],

> I matematici spesso pensano che la legge consista di un insieme di regole ferree, come assiomi, da cui trarre le conseguenze. La legge in realtà non è così. La legge probabilmente *non potrebbe* essere così.

Riferimenti bibliografici

[1] American Mathematical Society, American Statistical Association. Drawing voting districts and partisan gerrymandering: preparing for 2020. https://www.amstat.org/asa/files/pdfs/POL-GerrymanderingStatement2018.pdf
[2] J. Chen, J. Rodden. Unintentional gerrymandering: Political geography and elected bias in legislatures, Quart. J. Political Sciences **8** (2013), 239-269. https://www.nccourts.gov/assets/inline-files/LDTX154.pdf?YcdXhXVmKchq31c8BQXQ5YK3IjOED1ZX
[3] J. Ellemberg. Geometry, inference, complexity, and democracy, Bull. Amer. Math. Soc. **58**, 57–77, 2020. https://www.ams.org/journals/bull/2021-58-01/S0273-0979-2020-01708-8/S0273-0979-2020-01708-8.pdf
[4] C. Ingraham. America's most gerrymandered congressional districts, Washington Post, May 15, 2014. https://www.washingtonpost.com/news/wonk/wp/2014/05/15/americas-most-gerrymandered-congressional-districts/
[5] P. Sobleron. Gerrymandering, Sandwiches, and Topology, Notices Amer. Math. Soc. **64** (2017), 1010-1013. https://www-ams-org.unimib.idm.oclc.org/journals/notices/201709/rnoti-p1010.pdf
[6] Supreme Court of The United States. 18-422, https://www.supremecourt.gov/opinions/18pdf/18-422_9ol1.pdf
[7] Supreme Court of The United States. 21-1271. https://www.supremecourt.gov/opinions/22pdf/21-1271_3f14.pdf
[8] N. Stephanopoulos, E. McGhee. Partisan gerrymandering and the efficiency gap, U. of Chicago L. Rev. **82** (2015), 831. https://chicagounbound.uchicago.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1946&context=public_law_and_legal_theory
[9] Wikipedia, Gill v. Whitford. https://en.wikipedia.org/wiki/Gill_v._Whitford

Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università di Milano-Bicocca, Via Cozzi 55, 20125 Milano, Italy
Email address: giancarlo.travaglini@unimib.it

EMMECI quadro
Scienza Educazione E Didattica

DIRETTORE RESPONSABILE Mario Gargantini
https://www.ilsussidiario.net/news/emmeciquadro/

Aut. Trib. Milano n. 226 del 24.3.2000
ISSN 2240-0389
Emmeciquadro (online)