EMMECI quadro
Scienza Educazione E Didattica

n. 83
gennaio 2023

MARYNA VIAZOVSKA E L'IMPACCHETTAMENTO DI SFERE

*di Bianca Gariboldi**

* già *Professore di Chimica Fisica presso l'Università degli Studi di Milano*

La lunga storia del problema geometrico di ottimo la cui soluzione ha portato nel 2022 la medaglia Fields alla giovane matematica ucraina Maryna Viazovska, testimonia quanto la matematica sia una scienza viva. E quanto abbia bisogno di essere offerta in modo entusiasmante alle menti giovani, perché si dispongano ad entrare nel suo affascinante mondo di pensiero, anche sapendo che tempo, pazienza, impegno e passione alla scoperta sono indispensabili per ottenere risultati importanti.

Maryna Viazovska, nata a Kiev nel 1984, dopo essere stata portata dalla matematica in Germania per il dottorato, oggi lavora in Svizzera, all'École Polytechnique Fédérale de Lausanne. Nel 2022 ha vinto la medaglia Fields, uno dei più prestigiosi premi per la matematica, soprattutto per i suoi risultati riguardanti il problema dell'impacchettamento di sfere in otto dimensioni.

Cosa significa impacchettamento di sfere? L'obiettivo di questo tipo di problema è quello di riuscire a riempire con il maggior numero di sfere di uguale dimensione e uguale raggio una zona ampia qualsiasi dello spazio euclideo d-dimensionale, senza che queste sfere si sovrappongano. Ricordiamo che nello spazio d-dimensionale una sfera è definita come la bolla di raggio r e centro un punto $x = (x_1, \ldots, x_d)$ con $x_i \in \mathbb{R}$ per $i = 1, \ldots, d$:

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^d : \ \|x - y\| < r\},$$

dove $\|x - y\|$ indica la distanza tra $x = (x_1, \ldots, x_d)$ e $y = (y_1, \ldots, y_d)$:

$$\|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_d - y_d)^2}.$$


Maryna Wiazowska

Perché al giorno d'oggi siamo interessati all'impacchettamento di sfere? Oltre che per la disposizione di oggetti per il trasporto o l'immagazzinamento, questi risultati risultano indispensabili per produrre codici correttori di errori nella ricostruzione di segnali. Dal momento che l'errore tra il segnale vero e il dato reale non può essere troppo grande, si può ragionare su sfere ben disposte il cui centro corrisponde a una parola in codice, cioè a un insieme di simboli, e il cui raggio è l'errore massimo. L'obiettivo di un codice correttore di errori è codificare le parole in codice, che differiscono l'una dall'altra per al massimo $2r$ simboli: questo significa che la distanza tra i centri di sue sfere contigue è pari a $2r$, esattamente il doppio del raggio. Quindi, se nella trasmissione di una parola in codice si presentano meno di r errori nella trasmissione, allora esiste al massimo una parola in codice a distanza minore di r dalla parola ricevuta: è il centro della sfera. In questo modo, si riesce a correggere l'errore. Ovviamente, l'ideale sarebbe riempire tutto lo spazio a disposizione con delle sfere: per questo motivo abbiamo bisogno di impacchettamenti molto densi, che riempiano il più possibile lo spazio.

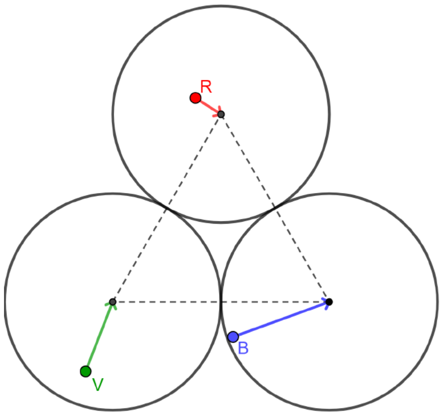

FIGURA 1. I segnali con errore R, V, B vengono corretti sostituendoli con i centri delle rispettive sfere, che corrispondono ciascuno a una parola in codice.

Una situazione molto vicina alla realtà che corrisponde all'impacchettamento di sfere è immaginare di dover riempire una scatola con delle sfere uguali: quante sfere riusciamo a mettere nella scatola al massimo? Ovviamente se la scatola è piccola, la risposta dipende dalla forma della scatola e dalla dimensione delle sfere. Ma se la scatola è molto grande, la sua forma non conta più e intuitivamente si capisce che con le sfere si può coprire fino a una porzione massima dello spazio a disposizione. La percentuale massima dello spazio che riusciamo a coprire con delle sfere è chiamata *costante di impacchettamento* e la indicheremo, nel caso d-dimensionale, con Δ_d.

Proviamo a metterci in dimensione $d = 1$. In questo caso, le sfere che stiamo considerando hanno la forma

$$B(x,r) = \{y \in \mathbb{R} : \ |x-y| < r\} = (x-r, x+r),$$

dato che $x, y \in \mathbb{R}$. Sono quindi degli intervalli. Quanto spazio riusciamo a coprire con degli intervalli? Ovviamente tutto: quindi in questo caso molto semplice abbiamo $\Delta_1 = 1$.

FIGURA 2. Affiancando gli intervalli, riempiamo tutto $\mathbb{R}$.

Aumentiano la dimensione e consideriamo il caso $d = 2$. In questo caso abbiamo che $B(x,r)$ coincide con un cerchio di raggio r e centro x. Immaginiamo allora di dover riempire il piano con cerchi nel modo più denso possibile. Un modo possibile potrebbe essere quello di dividere il piano in quadrati uguali e di inscrivere un cerchio in ogni quadrato:

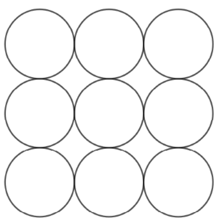

FIGURA 3. Cerchi in $\mathbb{R}^2$.

Se i quadrati hanno lato due, i cerchi hanno raggio unitario e quindi la percentuale di piano che riusciamo a ricoprire corrisponde a $\pi/4 \sim 0,785$. Questa configurazione però non è la migliore possibile. Infatti, intorno al 1900, Thue dimostra che la disposizione esagonale dei cerchi è l'impacchettamento migliore, con una densità $\Delta_2 = \pi/\sqrt{12} \sim 0,906$. In sostanza, il modo migliore per ricoprire il piano prende spunto dagli alveari delle api, composti da esagoni adiacenti:

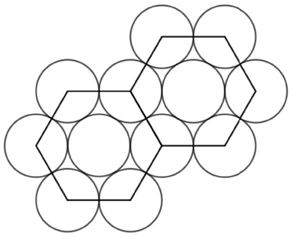

FIGURA 4. Impacchettamento esagonale.

Cosa succede in dimensione $d = 3$? Qui la faccenda si fa molto più seria. Questo problema era già un "problema" intorno al 1585, quando l'esploratore Sir Walter Raleigh, alle prese col conteggio delle palle di cannone per la sua spedizione, chiese al matematico Thomas Harriot se era possibile sapere quante palle di cannone vi fossero in una piramide a base quadrata, senza contarle una ad una. Harriot espose le sue idee sulla disposizione delle sfere a Keplero, che nel 1611 pubblicò un libretto dal titolo *Strena sue de nive sexangula (Sul fiocco di neve a sei angoli)*, che influenzò la scienza della cristallografia. Questo libretto conteneva la congettura di Keplero sul modo più efficace di impacchettare le sfere. Egli sosteneva che non esiste alcun modo di sistemare delle sfere nello spazio con densità superiore a quella dell'impacchettamento cubico a facce centrate ($\Delta_3 = \pi/\sqrt{18} \sim 0,74$), che corrisponde in sostanza a quello che si osserva quando le arance vengono impilate al mercato:

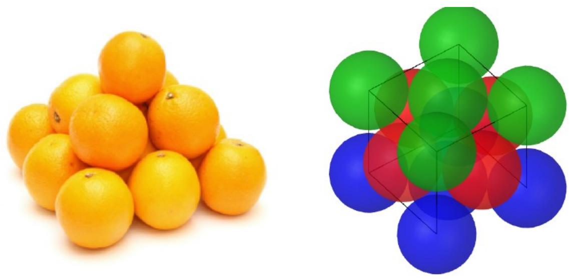

FIGURA 5. Impacchettamento cubico a facce centrate.

Questa congettura fu inserita nel 1900 da Hilbert nella lista dei 23 problemi del secolo: trovare una dimostrazione di questo fatto non è semplice, nonostante la configurazione sia molto intuitiva. Uno dei tanti problemi che complicano la situazione in dimensione tre è che in questo caso possiamo ottenere lo stesso impacchettamento in modi differenti, ottenendo così molti diversi ottimi impacchettamenti. La dimostrazione della congettura di Keplero fu pubblicata nel 1998, quando Thomas Hales scrisse 250 pagine di dimostrazione accompagnate da più di 3 gigabytes di codice.

Si può facilmente immaginare come il problema si complichi ulteriormente al crescere della dimensione. Risulta così ancora più sorpendente il fatto che Maryna Viazovska sia riuscita a trovare, senza l'ausilio di codici informatici, la costante di impacchettamento in dimensione 8 e, in seguito con la collaborazione di Cohn, Kumar, Miller e Radchenko, in dimensione 24. Dimostra così che è

$$\Delta_8 = \frac{\pi^4}{384} \sim 0,254,$$

che significa che circa il 25% dello spazio 8-dimensionale può essere coperto con sfere uguali che non si sovrappongono. La configurazione relativa a questa densità è chiamato *reticolo di impacchettamento delle sfere* E_8. La configurazione che invece dà la più alta densità in dimensione 24 si chiama *reticolo di impacchettamento delle sfere di Leech* e consente di avere la costante

$$\Delta_{24} = \frac{\pi^{12}}{12!} \sim 0,00193.$$

Come si può notare, la costante di impacchettamento diminuisce al crescere della dimensione. Questo fatto non deve sorprendere. Infatti, se consideriamo una sfera $2n$-dimensionale (quindi $d = 2n$), il suo volume equivale a

$$\frac{\pi^n}{n!}.$$

Questa quantità tende a zero quando n tende all'infinito. Immaginiamo ora di riempire lo spazio $2n$-dimensionale in modo ovvio, come abbiamo fatto nel primo esempio per $d = 2$, con cubi di lato 2. Ognuno di questi cubi contiene una sfera di raggio unitario il cui volume, quando la dimensione è molto grande, abbiamo notato tendere a zero: la percentuale di spazio occupato dalle sfere diventa irrisoria.

Possiamo anche notare che la costante di impacchettamento trovata da Maryna Viazovska in dimensione 8 non è affatto ovvia. Infatti, Δ_8 risulta essere minore della quantità

$$\frac{\pi^4}{4!} \cdot \frac{1}{2^8}$$

che otterremmo se considerassimo una sfera di raggio unitario inscritta in un cubo d-dimensionale di lato 2. Il valore

$$\Delta_8 = \frac{\pi^4}{384} = \frac{\pi^4}{4!} \cdot \frac{1}{(\sqrt{2})^8}$$

corrisponde alla densità che si otterrebbe se il lato del cubo in cui è inscritta la sfera unitaria fosse pari a $\sqrt{2}$, il che è ovviamente impossibile.

Può quindi essere molto ingannevole affidarsi alle intuizione che abbiamo in dimensione due o tre per comprendere e analizzare a fondo dimensioni più alte. Le dimensioni basse e le dimensioni alte sono realtà spesso diverse. Hanno ragione i bambini piccoli quando iniziano a contare dicendo: *uno, due, tre, tanti.*

(B. Gariboldi) Dipartimento di Ingegneria Gestionale, dell'Informazione e della Produzione, Università degli Studi di Bergamo, Viale Marconi 5, Dalmine BG, Italy

EMMECI quadro
Scienza Educazione E Didattica

DIRETTORE RESPONSABILE Mario Gargantini
https://www.ilsussidiario.net/news/emmeciquadro/

Aut. Trib. Milano n. 226 del 24.3.2000
ISSN 2240-0389
Emmeciquadro (online)