EMMECI quadro
Scienza Educazione E Didattica

n. 79
settembre 2021

EUCLIDE E LA PREPARAZIONE AGLI STUDI UNIVERSITARI

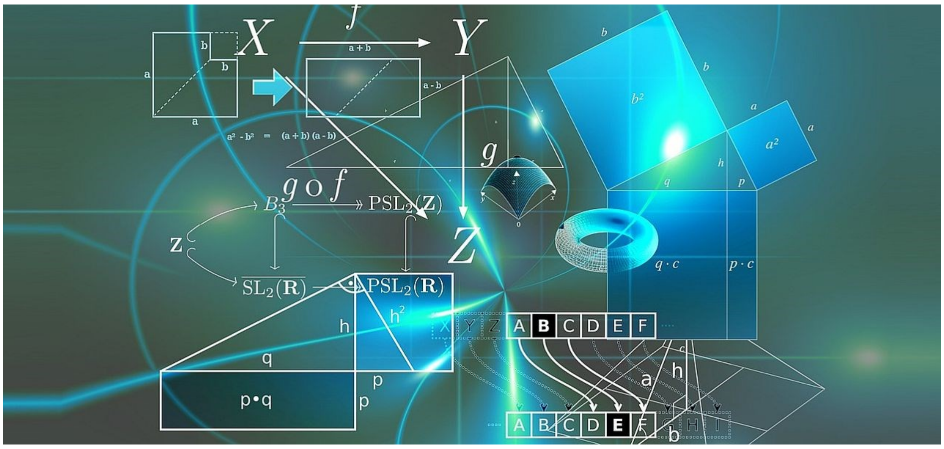
Marina Barbieri, Luca Brandolino**, Giancarlo Travaglini****

** Scuola Imiberg, Bergamo*

*** Dipartimento di Ingegneria Gestionale, dell'Informazione e della Produzione, Università degli Studi di Bergamo,*

**** Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università di Milano-Bicocca,*

Trascurare o minimizzare il ruolo della Matematica di Euclide nella scuola secondaria di secondo grado può essere un grave errore: un impoverimento culturale per tutti, e un effettivo "handicap" per chi si iscriverà ad un corso di laurea di carattere tecnico-scientifico.



Lo sviluppo della scienza occidentale è basato su due grandi conquiste, l'invenzione del sistema logico formale (nella Geometria Euclidea) da parte dei filosofi greci, e la scoperta della possibilità di trovare relazioni causali tramite esperimenti sistematici (Rinascimento). A. Einstein, Lettera a J. S. Switzer, 23 Apr 1953, Einstein Archive 61-381. Citata in "Alice Calaprice, The Quotable Einstein", Princeton Univ. Press (1996).

Lo studio della Geometria Euclidea (piana e solida) nella scuola secondaria di secondo grado è periodicamente oggetto di discussioni spesso appassionate ed interessanti (vedi ad esempio [1, 3, 8, 10, 12, 13, 15]). In questo intervento vogliamo soprattutto proporre all'attenzione del lettore il seguente aspetto didattico della Matematica di Euclide, forse non abbastanza sottolineato.

Studiare la Matematica di Euclide è un modo efficace per prepararsi agli studi universitari in cui sono presenti esami di Matematica.

Ci piace usare il termine "Matematica di Euclide" invece di "Geometria Euclidea" per indicare anche i contenuti degli Elementi di Euclide [4, 5] non strettamente geometrici, ad esempio il teorema sull'infinità dei numeri primi o l'Algoritmo di Euclide. È comunque una distinzione non particolarmente rilevante per quello che segue.

Questo però non è un articolo *sulla* Matematica di Euclide, di cui quindi non sottolineiamo l'enorme valore culturale, e neppure le criticità. È un articolo sulla difficoltà della preparazione agli studi universitari nei quali sono presenti esami di Matematica, e sul fatto che il lavoro sulla Matematica di Euclide può essere un modo efficace per prepararsi ad affrontare questa difficoltà.

Iniziamo con un punto di vista più generale.

1 In realtà lo studio della Matematica di Euclide è importante per tutti

Gli studenti dovrebbero uscire dalla scuola secondaria di secondo grado con la necessaria precisione di linguaggio, la sicurezza nell'uso di esempi, implicazioni, dimostrazioni per assurdo, la conoscenza delle regole e dei simboli utilizzati nello studio e nelle operazioni all'interno di insiemi generici ed in particolare di insiemi numerici.

Questo è importante per chi intende proseguire con studi universitari in cui sono presenti esami di Matematica, ma è soprattutto parte dell'*esprimersi bene*, cioè del *farsi capire*: è parte cioè della capacità di una persona di presentare in modo razionale e chiaro le proprie argomentazioni. La Matematica di Euclide, ci insegna questa precisione di linguaggio, che impariamo soprattutto attraverso gli esercizi, cioè le dimostrazioni di piccoli teoremi. In questi esercizi non vi è spazio per il "non mi sono spiegato bene", perché usualmente è facile verificare se un ragionamento è corretto, sbagliato, o può essere "messo a posto".

Un medico o un magistrato non deve sostenere esami di Matematica nei suoi studi universitari, ma ci aspettiamo che in una relazione o in una comunicazione importante chiarisca bene quali sono tutti i termini non impliciti di cui parla, *quanti* sono (esattamente uno, almeno uno, la maggioranza, tutti, ...) e non commetta errori logici nei suoi ragionamenti.

Nella sua autobiografia [7] A. Lincoln scriveva: *Alla fine (mi) dissi: LINCOLN, non potrai mai diventare un avvocato se non capisci cosa significa "dimostrare"; e lasciai il mio lavoro a Springfield, andai a casa da mio padre, rimasi lì fino a quando fui in grado di produrre a vista tutte le proposizioni nei sei libri di Euclide. Allora scoprii cosa significa dimostrare, e ritornai a miei studi di legge.*

In modo più colorito C.F. Manara scriveva [9]: *Ricordiamo di aver letto, in occasione di una delle innumerevoli discussioni decennali sulle riforme della scuola media, che è assolutamente inutile insegnare per es. il Teorema di Pitagora a chi intende fare l'avvocato e che non avrà mai occasione di utilizzare tale teorema nel resto della sua vita. Osservazione - come dicevamo - da sprovveduti, alla quale si dovrebbe rispondere che proprio l'avvocato deve incontrare, almeno una volta nella sua vita, un ragionamento astratto e rigoroso, quale si può condurre su contenuti geometrici.*

Questa capacità logica va di pari passo con la buona conoscenza della lingua italiana, e vorremmo essere capaci di sostenere gli argomenti di questo articolo con parole suggestive come quelle usate negli anni 50 da Don Milani per difendere lo studio della lingua [11]: *Mi richiamo dieci, venti volte per sera alle etimologie. Mi fermo sulle parole, gliele seziono, gliele faccio vivere come persone che hanno una nascita, uno sviluppo, un trasformarsi, un deformarsi. Nei primi anni i giovani non ne vogliono sapere di questo lavoro perché non ne afferrano subito l'utilità pratica. Poi pian piano assaggiano le prime gioie. La parola è la chiave fatata che apre ogni porta. L'uno se ne accorge nell'affrontare il libro del motore per la patente. L'altro fra le righe del giornale del suo partito. Un terzo s'è buttato sui romanzieri russi e li intende. Ognuno di loro se n'è accorto poi sulla piazza del paese e nel bar dove il dottore discute con il farmacista a voce alta, pieni di boria. Delle loro parole afferra oggi il valore e ogni sfumatura. S'accorge solo ora che esprimono un pensiero che non vale poi tanto quanto pareva ieri, anzi pochino. I più arditi hanno provato anche a metter bocca. Cominciano a inchiodar il chiacchierone sulle parole che ha detto.*

2 Gli studi universitari in cui sono presenti esami di Matematica

Parliamo dei corsi di laurea in cui è presente almeno un esame di Matematica, quindi dei corsi di laurea in Matematica, Fisica, Statistica, Scienza dei Materiali, Chimica, Ingegneria, Informatica, Economia, Biologia, ... L'aggettivo almeno parzialmente corretto per questi corsi sarebbe "quantitativo", ma forse parlare di corsi "di carattere tecnico-scientifico" è più chiaro.

Per tutti i corsi universitari è richiesta una *Valutazione della Preparazione Iniziale* a cui segue un "numero chiuso", oppure una serie di ostacoli per chi non ha superato questa valutazione. È quindi ovvio che le studentesse e gli studenti investano tempo e impegno nel prepararsi a questi "test di ingresso". Sono un tempo e un impegno investiti utilmente, anche perché di solito questi test sono ben fatti e - diciamolo - sono uno strumento che dà le stesse opportunità a tutti.

Il problema, di cui le matricole si accorgono velocemente, è che i test di ingresso non finiscono mai, poiché, e qui torniamo a parlare dei corsi di laurea di carattere tecnico-scientifico, la percentuale di abbandoni tra il primo e il secondo anno è molto alta, spesso a causa dell'esame (degli esami) di Matematica.

Ai docenti di Matematica del primo anno dell'Università può accadere di incontrare (non nei primi appelli) studentesse/studenti che, dopo avere superato l'esame di Matematica descrivono nel modo seguente la propria esperienza: "Non ero in grado di seguire le lezioni, la comprensione era zero. Allora ho preso in mano i libri di Matematica della scuola superiore e ho passato qualche mese a ricostruirmi le basi; poi, seppure in ritardo, ho studiato per il suo esame e l'ho superato".

A volte non sono quindi le carenze di prerequisiti a pregiudicare un percorso universitario, ma la personale determinazione e, come vedremo, il non aver acquisito un metodo che consenta di studiare autonomamente un libro di Matematica.

Molti degli studenti che abbandonano gli studi universitari a causa della Matematica avrebbero potuto "salvarsi" attraverso un lavoro specifico iniziato per tempo. Perdiamo, in altre parole, matricole che, opportunamente guidate e stimolate, avrebbe potuto terminare con successo gli studi universitari. Tutto questo unito al fatto che si tratta spesso di corsi di laurea che producono meno laureati rispetto alle richieste del mondo del lavoro; è quindi un "problema della società", oltre che un problema delle singole persone.

La Matematica richiede capacità di ragionamento e uno specifico metodo di studio. Bisogna innanzitutto conoscere il *linguaggio della Matematica* (i quantificatori, i simboli, le definizioni, le rappresentazioni di implicazioni attraverso insiemi, le proposizioni, le negazioni, le dimostrazioni per assurdo, ...). Poi bisogna capire come studiare un libro di Matematica: saper esemplificare gli oggetti descritti astrattamente da una definizione, capire quando una implicazione è corretta o sbagliata, saper utilizzare in una situazione analoga una idea o una tecnica viste in un esempio, avere la pazienza e il gusto per cercare da soli dimostrazioni di piccoli risultati matematici, capire che spesso è meglio svolgere pochi esercizi in modi diversi piuttosto che "studiare" le soluzioni di molti esercizi, sapere criticare il proprio lavoro, scrivendo i ragionamenti e i calcoli e, dopo qualche ora o giornata, rileggendo in modo critico quello che è stato scritto, ... (vedi [2] per un approfondimento di questo argomento).

Non è raro osservare che negli esami universitari di Matematica le studentesse e gli studenti provenienti dal Liceo Classico ottengono (eventualmente dopo una iniziale difficoltà) risultati migliori rispetto a chi proviene da istituti in cui si insegna molta più Matematica. Il problema non sembra quindi "insegnare più Matematica nella scuola secondaria di secondo grado".

3 La Matematica di Euclide nella scuola secondaria di secondo grado

Il nostro suggerimento è quello di non trascurare gli aspetti di dimostrazione presenti in tutte le ramificazioni della Matematica e di affrontarli il prima possibile, sin dal primo biennio della scuola secondaria di secondo grado. A tale scopo offrono interessanti prospettive il teorema di Ruffini o la dimostrazione delle proprietà dei radicali, ma sono aspetti occasionali, che necessariamente passano in secondo piano rispetto al fondare e consolidare il calcolo algebrico. Nella Matematica di Euclide, invece l'aspetto deduttivo e di dimostrazione è centrale e caratterizzante, e consente in modo privilegiato lo sviluppo razionale della mentalità degli studenti. Innanzitutto perché i suoi oggetti (numeri naturali, segmenti, triangoli, quadrati, ...) sono oggetti familiari. In secondo luogo perché, a fianco dei teoremi importanti – con le dimostrazioni da capire, studiare e saper ricostruire – ci sono numerosissimi esercizi nei quali lo studente è chiamato a piccole dimostrazioni personali che possono avvicinarlo alla creazione della teoria, togliendo parte della soggezione che questa incute. Rispetto agli esercizi costituiti da queste dimostrazioni, la preoccupazione del docente dovrebbe essere far capire alle studentesse e agli studenti che il loro "nemico" non è il teorema, ma il non saper cosa fare, aspettando l'ispirazione di fronte ad un foglio bianco. Bisogna invece pensare a risultati già incontrati in precedenza, simili al teorema che si richiede di dimostrare e che possano fornire qualche idea, oppure immaginare esempi, usando la matita o Geogebra (vedi [6], [14]) su cui verificare l'enunciato del teorema. Nel dimostrare, ad esempio, un teorema relativo ad un triangolo generico può essere utile verificarlo prima per un triangolo isoscele o un triangolo rettangolo, ... come se si cercasse testardamente di dimostrare la falsità del teorema. E se anche non si arriva alla "dimostrazione" non sarà stato tempo perso. Viene alla mente il famoso passaggio di Maria Zambrano [16]: *La resistenza iniziale di colui che irrompe nelle aule si trasforma in attenzione. La domanda comincia a spiegarsi. L'ignoranza risvegliata è già intelligenza ...*

È vero che molti studenti pensano, sbagliando, che qualche esempio costituisca tout court una dimostrazione, ma lo scrivere esempi non va scoraggiato, va detto che spesso questo è il primo passo, ovviamente non sufficiente, ma che osservando con cura gli esempi trovati si può a volte capire perché un risultato è vero e quindi iniziare a dimostrarlo in generale.

La struttura ipotetico deduttiva della Matematica è presente con pari valore di metodo nel calcolo differenziale e integrale che si sviluppa tra il quarto e il quinto anno. Qui, incontrando nozioni ed oggetti astratti nuovi e non facili da visualizzare, come limiti, funzioni, derivate e integrali, le studentesse e gli studenti consolidano la capacità di seguire i passaggi logici, di comprendere l'idea di una dimostrazione, di arrivare ad un proprio ragionamento astratto dopo aver osservato un buon numero di esempi. Al primo anno di un corso di laurea di carattere tecnico-scientifico le matricole incontrano almeno un esame di Matematica che, con l'approfondimento adeguato al corso di laurea, ha esattamente la struttura ipotetico-deduttiva appena descritta: una struttura non facile da affrontare per le matricole che non l'hanno almeno in parte già assimilata durante la scuola secondaria, quindi principalmente attraverso la Matematica di Euclide e l'Analisi.

In conclusione, la Matematica di Euclide (soprattutto attraverso lo svolgimento personale di molte dimostrazioni) contribuisce in modo significativo a fondare, in un momento della crescita particolarmente propizio, un metodo di lavoro razionale indispensabile per affrontare lo sviluppo dell'Analisi negli ultimi anni e successivamente gli esami di Matematica nei diversi corsi di laurea.

Siamo consapevoli che l'insegnamento della Matematica di Euclide nella scuola secondaria di secondo grado sia tutt'altro che semplice e richieda delicate scelte didattiche. A nostro avviso non si tratta di presentarne la costruzione assiomatica in modo completo, ma di mostrare come si sviluppa un ragionamento ipotetico deduttivo e sfruttare l'enorme disponibilità di esercizi che per semplicità, varietà e coinvolgimento personale nelle dimostrazioni, non ha eguali in tutto il percorso preuniversitario.

> *La Matematica come scienza iniziò quando qualcuno, probabilmente un greco, per la prima volta dimostrò proposizioni su qualsiasi oggetto o su qualche oggetto, senza specificazione di cose particolari ben definite.* A. N. Whitehead, Introduzione alla Matematica, Sansoni (1961).

Marina Barbieri*

Luca Brandolini†

Giancarlo Travaglini‡

*Scuola Imiberg, Via S. Lucia 14, 24128 Bergamo,
barbieri.marina@imiberg.it

†Dipartimento di Ingegneria Gestionale, dell'Informazione e della Produzione, Università degli Studi di Bergamo, Viale Marconi 5, 24044 Dalmine BG,
luca.brandolini@unibg.it

‡Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università di Milano-Bicocca, Via Cozzi 55, 20025 Milano,
giancarlo.travaglini@unimib.it

Riferimenti bibliografici

[1] I. Adler, *What shall we teach in High School Geometry? Math. Teacher* **61**, 226-238 (1968).

[2] M. Bramanti, G. Travaglini, Matematica. Questione di metodo, Zanichelli (2009).

[3] Commission de réflexion sur l'eisegnement des mathématiques, Rapport d'étape sur la géométrie et son einsegnement, Bull. APMEP **430** (2000).

[4] Euclide, Tutte le Opere, Bompiani (2007).

[5] Euclid's Elements, http://mathcs.clarku.edu/ djoyce/java/elements/aboutText.html

[6] Geogebra, http://www.geogebra.org

[7] H. Ketcham, The Life of Abraham Lincoln (1901), http://public-library.uk/ebooks/55/90.pdf

[8] A. Kucharski, *Euclid as Founding Father, Nautilus, Issue 41 (2016)*, http://nautil.us/issue/41/selection/euclid-as-founding-father

[9] C. F. Manara, *La Geometria. Problemi logici e didattici*, Inserto redazionale a "Scuola e Didattica", n.3 del 15 ottobre 1984, Ed. La Scuola.

[10] C. Mammana, V. Villani, *Geometry and geometry teaching through the ages*, in "Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st century", ICMI study, Kluwer (1998).

[11] L. Milani, *Lettera a "Il Giornale del Mattino" di Firenze*, 28 marzo 1956.

[12] G. Ottaviani, *Riflessioni sull' insegnamento della geometria oggi*, Atti "Matematica, formazione scientifica e nuove tecnologie", Montevarchi, Ed. M. Cerasoli (2001).

[13] Stack Exchange Network, Mathematics Educators. *Is Euclid dead? or Should Euclidean geometry be taught to high school students?* https://matheducators.stackexchange.com/questions/2074/is-euclid-dead-or-should-euclidean-geometry-be-taught-to-high-school-students

[14] G. Venema, *Exploring Advanced Euclidean Geometry with GeoGebra*, Mathematical Association of America (2013).

[15] H. Wu, *The Role of Euclidean Geometry in High School*, Jour. Math. Behav.**15**, 221-237 (1996), researchgate.net/publication/234609373_The_Role_of_Euclidean_Geometry_in_High_School

[16] M. Zambrano, Per abitare l'esilio, Editore Le Lettere (2006).

EMMECI quadro
Scienza Educazione E Didattica

DIRETTORE RESPONSABILE Mario Gargantini
www.emmeciquadro.eu

Aut. Trib. Milano n. 226 del 24.3.2000
ISSN 2240-0389
Emmeciquadro (online)