EMMECI quadro
Scienza Educazione E Didattica
n. 71
dicembre 2018

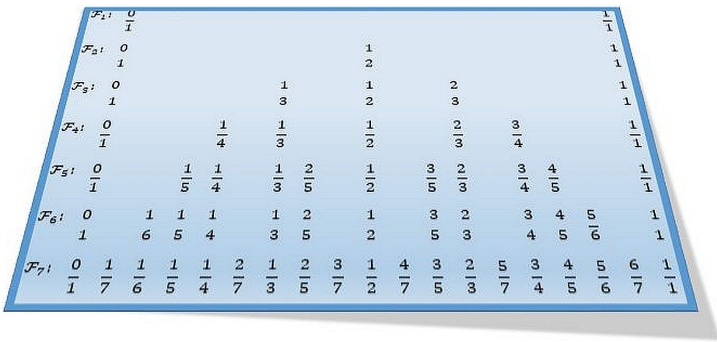
IL PARADOSSO DI SIMPSON

di Giancarlo Travaglini *

* Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università drgli Studi di Milano-Bicocca

L'interpretazione di un curioso paradosso statistico è collegata a un delicato problema di approssimazione di numeri reali attraverso numeri razionali e alla successione di Fibonacci.

I dati statistici sono una sintesi di alcuni aspetti della realtà e influenzano le decisioni sui fenomeni sociali, aziendali, finanziari, sanitari, ... La realtà non è contraddittoria, ma le conclusioni che decidiamo di trarre dai dati possono esserlo. Il *Paradosso di Simpson* (legato al nome di Edward Simpson, che nel 1951 – come già altri prima di lui – lo descrisse) riguarda l'apparire di contraddizioni tra l'analisi di dati aggregati e dati disaggregati. Lo presentiamo attraverso due esempi, uno di carattere sociale, l'altro medico.



Discriminazione a Berkeley

Nel 1973 l'università di Berkeley fu uno dei primi atenei a essere denunciato per discrimi-nazione di genere[1]. Per l'ammissione al semestre autunnale di quell'anno furono esami-nate 12763 domande di iscrizione (8442 di ragazzi e 4321 di ragazze) e le ammissioni, suddivise per genere, furono quelle riportate nella tabella seguente.

	ammesse/i	ammesse/i %
maschi	3738	44,28%
femmine	1494	34,57%

Dal punto di vista dell'università fu a quel punto naturale disaggregare i dati per capire quali dipartimenti avevano contribuito a questa discrepanza. Quelli che seguono sono i dati dei sei principali major.[2]

[1] Int'l Bhd. of Teamsters v. United States, 431 U.S. 324, 339 (1973); P. J. Bickel, E. A. Hammel, J. W. O'Connell (1975). *Sex bias in graduate admissions: Data from Berkeley. Science, 187(4175), 398-404;* D. Freedman, R. Pisani, R. Purves (2007), *Statistics*, W. W. Norton.

[2] Insieme ad una formazione di base gli studenti devono scegliere una materia principale (major): Ingegneria, Storia, Psicologia, ... L'università non ha fatto sapere chi è A, chi è B, etc.

	maschi		femmine	
	domande	% ammessi	domande	% ammesse
A	825	62%	108	82%
B	560	63%	25	68%
C	325	37%	593	34%
D	417	33%	375	35%
E	191	28%	393	24%
F	373	6%	341	7%

Qui la differenza di genere è ancora più marcata: risultano globalmente ammessi circa il 45% dei maschi e il 30% delle femmine. Eppure in quattro major la percentuale di ragazze ammesse è maggiore, mentre nei rimanenti due il vantaggio dei maschi è contenuto. In altre parole, il dato complessivo dei sei major mostra una discriminazione verso le femmine, mentre nel dato disaggregato non appare alcuna discriminazione o addirittura si può pensare ad una discriminazione contro i maschi.
La spiegazione è nel fatto che i dati precedenti non tengono conto delle scelte dei major da parte delle candidate / dei candidati. Le ragazze tendevano ad iscriversi ai major più selettivi, nei quali la percentuale di ammissioni era inferiore, mentre i maschi si iscrivevano spesso a major in cui era più facile essere ammessi.

Calcoli renali

Anche il secondo esempio descrive dati reali.[3]
Due cure (X e Y) per il trattamento dei calcoli renali sono state sperimentate su due gruppi di 350 pazienti, con il risultato che la percentuale di successi è stata del 78% per la cura X e dell'83% per la cura Y. Se però si separano i risultati rispetto alla gravità della malattia, la conclusione cambia: si scopre che per i casi gravi la percentuale di successi è stata del 73% per la cura X e del 69% per la cura Y; mentre per i casi non gravi la percentuale di successi è stata del 93% per la cura X e dell'87% per la cura Y.
In altre parole, i pazienti sono stati suddivisi in due gruppi (calcoli piccoli e calcoli grandi); per ciascuno dei due gruppi sembra migliore la cura X, ma se non suddividiamo i pazienti allora, nel gruppo complessivo, sembra migliore la cura Y.

> Questo è il paradosso. Come se un farmacista dicesse ad un genitore: Se suo figlio ha almeno 10 anni le consiglio la medicina *alfa*, e se ha meno di 10 anni le consiglio ancora *alfa*; se però lei non sa l'età di suo figlio, allora le consiglio la medicina *beta*.

[3]C. R. Charig; D. R. Webb; S. R. Payne; J. E. Wickham (1986). *Comparison of treatment of renal calculi by open surgery, percutaneous nephrolithotomy, and extracorporeal shockwave lithotripsy.* Br. Med. J. (Clin. Res. Ed.). 292 (6524): 879--882.

Per capire cosa è successo controlliamo innanzitutto i numeri.

	cura X	cura Y
Calcoli piccoli (% di successi)	81/87 (93%)	234/270 (87%)
Calcoli grandi (% di successi)	192/263 (73%)	55/80 (69%)
Tutti i calcoli (% di successi)	273/350 (78%)	289/350 (83%)

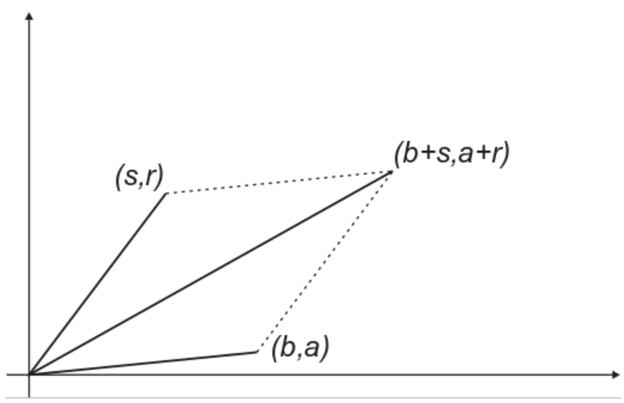
che mostrano un fatto aritmetico non molto intuitivo:

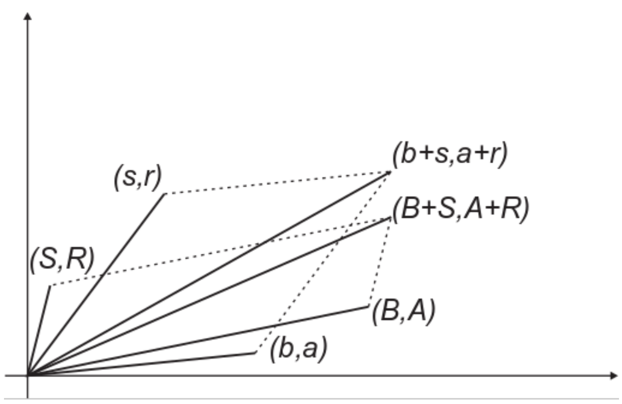
$$\frac{81}{87} > \frac{234}{270}, \quad \frac{192}{263} > \frac{55}{80}, \qquad ma \quad \frac{81+192}{87+263} < \frac{234+55}{270+80}$$

Abbiamo quindi otto numeri positivi a,b,r,s,A,B,R,S tali che

$$\frac{A}{B} > \frac{a}{b}, \quad \frac{R}{S} > \frac{r}{s}, \qquad ma \quad \frac{A+R}{B+S} < \frac{a+r}{b+s}$$

È utile visualizzare questo fatto nel modo seguente (per comodità grafica i punti nella figura seguente rappresentano numeri diversi dai precedenti).
Possiamo, ad esempio, vedere la frazione a/b come il coefficiente angolare della retta che collega l'origine con il punto (b,a) nel piano cartesiano. Analogamente r/s è il coefficiente angolare della retta che collega l'origine con il punto (s,r). Infine $(a+r)/(b+s)$ è il coefficiente angolare della retta che collega l'origine con il punto $(b+s,a+r)$, cioè con la somma dei vettori (b,a) e (s,r), ottenuta attraverso la regola del parallelogrammo.
Ora osserviamo che la disuguaglianza $\frac{A}{B} > \frac{a}{b}$ significa che la semiretta che parte dall'origine e passa per il punto (b,a) sta sotto quella che passa per (B,A), e analogamente per gli altri punti. La seconda figura mostra un esempio in cui le tre disuguaglianze $\frac{A}{B} > \frac{a}{b}$, $\frac{R}{S} > \frac{r}{s}$, $\frac{A+R}{B+S} < \frac{a+r}{b+s}$ sono soddisfatte.





Tornando all'esempio delle cure, non è difficile spiegare cosa è successo. Le consistenze dei quattro gruppi rispetto alla gravità della malattia erano molto diverse: inoltre i medici tendevano a somministrare la cura X (migliore) ai casi più gravi (calcoli grandi) e la cura Y (meno efficace) ai casi meno gravi (calcoli piccoli). Il risultato complessivo è quindi sostanzialmente determinato dai gruppi 2 e 3 nella tabella.

	cura X	cura Y
Calcoli piccoli (% di successi)	81/87 (93%) gr. 1	234/270 87%) gr. 2
Calcoli grandi (% di successi)	192/263 (73%) gr.3	55/80 (69%) gr. 4
Tutti i calcoli. (% di successi)	273/350 (78%)	289/350 83%)

Somministrando la cura X prevalentemente a malati gravi (e la cura Y prevalentemente a malati non gravi), come è stato fatto nello studio in considerazione, si ottiene che l'efficacia globale della cura X è inferiore, e questo potrebbe portare alla discutibile conclusione che la cura X è meno efficace.

Il punto comune ai due esempi precedenti è che è stata trascurata una variabile importante: la scelta del major da parte dei ragazzi / delle ragazze, piuttosto che la gravità della malattia. A volte gli statistici le chiamano *variabili in agguato* (lurking variables).

Con quale frequenza appare il paradosso di Simpson? Possiamo porre la domanda nel seguente modo (la risposta è un problema aperto).

Problema. *Per ogni intero positivo* n *indichiamo con* $\mathcal{F}_n$ *l'insieme delle frazioni* p/n *non semplificabili e tali che* $0 < p < q < n$ *(e con* $\mathcal{F}_n^4$ *l'insieme delle quaterne di queste frazioni). Stabilire se esiste e, in caso affermativo, quanto vale*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{card}\left\{\left(\frac{A}{B},\frac{a}{b},\frac{R}{S},\frac{r}{s}\right)\in\mathcal{F}_{\mathrm{n}}^4:\ \frac{A}{B}>\frac{a}{b},\ \ \frac{R}{S}>\frac{r}{s},\ \ \frac{A+R}{B+S}<\frac{a+r}{b+s}\right\}}{\mathrm{card}\left\{\left(\frac{A}{B},\frac{a}{b},\frac{R}{S},\frac{r}{s}\right)\in\mathcal{F}_{\mathrm{n}}^4:\ \frac{A}{B}>\frac{a}{b},\ \ \frac{R}{S}>\frac{r}{s}\right\}},$$

dove "card" *indica il numero di elementi in un insieme finito.*

Torneremo più avanti sull'operazione che alle due frazioni a/b e r/s associa la frazione $(a+r)/(b+s)$, e ne vedremo le connessioni con l'approssimazione diofantea e con la successione di Fibonacci.

Approssimazione diofantea

In Teoria dei Numeri si chiama *Approssimazione diofantea* (da Diofanto di Alessandria) lo studio dell'approssimazione dei numeri reali mediante numeri razionali. Sappiamo che l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali è denso nell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali. Cioè per ogni numero reale esistono numeri razionali ad esso arbitrariamente vicini. Ad esempio, il numero

$$\sqrt{2} = 1{,}414213562\ldots$$

è approssimato da $1{,}4 = 14/10$ a meno di $1/10$, da $1{,}41 = 141/100$, a meno di $1/100$, da $1{,}414 = 1414/1000$ a meno di $1/1000$, e così via. Ma è proprio necessario un denominatore uguale a 1000 per avere una approssimazione di $1/1000$? Una risposta importante è data dal seguente teorema, dimostrato da Dirichlet verso il 1840.

Teorema. *Per ogni numero irrazionale α esistono infiniti razionali p/n tali che*

$$\left|\alpha - \frac{p}{n}\right| < \frac{1}{n^2}.$$

Quindi, per infiniti denominatori n, esistono frazioni che approssimano $\sqrt{2}$ molto più velocemente di quanto suggerisce lo sviluppo decimale.

Dimostrazione. Indichiamo con $[\alpha]$ la parte intera di un numero reale α (cioè il più grande intero che non supera α) e con $\{\alpha\}$ la sua parte frazionaria (quindi $\alpha = [\alpha] + \{\alpha\}$). Suddividiamo l'intervallo $[0,1]$ negli $N+1$ intervalli

$$\left[0, \frac{1}{N+1}\right), \left[\frac{1}{N+1}, \frac{2}{N+1}\right), \left[\frac{2}{N+1}, \frac{3}{N+1}\right), \ldots, \left[\frac{N}{N+1}, 1\right]$$

ciascuno dei quali ha lunghezza $1/(N+1)$. Allora almeno due (possiamo supporli diversi da 0 e 1) degli $N+2$ numeri $0, \alpha, 2\alpha, 3\alpha, \ldots, N\alpha, 1$ devono stare nello stesso intervallo e quindi soddisfano $|\{j\alpha\} - \{k\alpha\}| < 1/(N+1)$. Allora

$$\frac{1}{N+1} > |\{j\alpha\} - \{k\alpha\}| = |(j-k)\alpha - [j\alpha] + [k\alpha]|$$

Scegliendo $n = j - k$ e $p = [j\alpha] - [k\alpha]$ otteniamo

$$|n\alpha - p| < \frac{1}{N+1},$$

da cui segue facilmente il teorema di Dirichlet.

■

La dimostrazione precedente si basa su un argomento semplice, ma famoso e spesso utile, chiamato *Principio delle caselle*, o delle *Nicchie di colombaia*, o dei *Cassetti di Dirichlet*: se abbiamo m celle e un numero di oggetti maggiore di m da sistemare in esse, allora esiste almeno una cella che contiene almeno due oggetti.

La potenza $\frac{1}{n^2}$ nel teorema di Dirichlet non può essere migliorata. Dimostriamo infatti il seguente

Teorema. *Sia α un numero irrazionale algebrico di secondo grado (ad esempio $\alpha = \sqrt{2}$). Allora esiste una costante $H > 0$ tale che, per ogni razionale p/n,*

$$\left|\alpha - \frac{p}{n}\right| \geq \frac{H}{n^2}.$$

Dimostrazione. Possiamo supporre n grande. Sia $Q(x) = Mx^2 + Nx + P$ un polinomio di secondo grado a coefficienti interi tale che $Q(\alpha) = 0$. Per il teorema del valor medio, esiste θ compreso tra α e p/n tale che

$$\frac{Q(\alpha) - Q\left(\frac{p}{n}\right)}{\alpha - \frac{p}{n}} = Q'(\theta).$$

Essendo $Q'(x) = 2Mx + N$ a coefficienti interi e α un numero irrazionale, abbiamo $Q'(\alpha) \neq 0$ e quindi, per la continuità della funzione $Q(x)$, esiste $\delta > 0$ tale che $|Q'(x)| < 2|Q'(\alpha)|$ per $|x - \alpha| < \delta$. Possiamo anche assumere che n soddisfi $\left|\alpha - \frac{p}{n}\right| < \frac{1}{n^2}$ (altrimenti non c'è nulla da dimostrare) e quindi, avendo scelto n grande, supponiamo che p/n (e quindi θ) sia nell'intorno di α di raggio δ. Allora

$$\begin{aligned}\left|\alpha - \frac{p}{n}\right| &= \left|\frac{Q\left(\frac{p}{n}\right)}{Q'(\theta)}\right| > \left|\frac{Q\left(\frac{p}{n}\right)}{2Q'(\alpha)}\right| = \frac{1}{2|Q'(\alpha)|}\left|M\left(\frac{p}{n}\right)^2 + N\left(\frac{p}{n}\right) + P\right| \\ &= \frac{1}{|2Q'(\alpha)|}\left|\frac{Mp^2 + Npn + Pn^2}{n^2}\right| \geq \frac{1}{2|Q'(\alpha)|n^2},\end{aligned}$$

poiché Q non ha radici razionali (e quindi $Q(p/n) \neq 0$), allora $Mp^2 + Npn + Pn^2$ è un intero non nullo e quindi $Mp^2 + Npn + Pn^2 \geq 1$.

■

Più in generale J. Liouville ha dimostrato nel 1844 che se α è un numero irrazionale algebrico di grado K (cioè è irrazionale ed è soluzione di una equazione algebrica di grado K a coefficienti interi, irriducibile, allora esiste una costante $c > 0$ tale che[4], per ogni razionale p/n,

[4] Il risultato migliore (e ottimale) è il teorema di Thue-Siegel-Roth, dimostrato da K. Roth nel 1955, secondo cui, dato un irrazionale algebrico α e $\varepsilon > 0$ piccolo esiste una costante $c > 0$ tale che

$$\left|\alpha - \frac{p}{n}\right| \geq \frac{c}{n^K}\,.$$

Questo risultato ha permesso a Liouville la prima costruzione esplicita di numeri *trascendenti* (cioè non soluzioni di alcuna equazione algebrica a coefficienti interi). Un esempio è

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 10^{n!} = 0{,}110001\;00000000000000000100\;\ldots$$

(dove le cifre uguali a 1 occupano il 1°, 2°, 6°, 24°, 120°, 720°, ... posto dopo la virgola (cioè le posizioni 1!, 2!, 3!, 4!, 5!, 6!, ...).

Quello dei numeri trascendenti non è l'unico caso di un insieme di numeri reali (diciamo compresi tra 0 e 1) che ha misura uguale a 1 (e quindi lascia fuori solo un insieme di misura nulla), eppure è difficile trovarne (cioè scriverne esplicitamente) esempi. Qualcosa di analogo accadde in epoca pitagorica per i numeri irrazionali e nei due secoli scorsi per i numeri trascendenti e i numeri normali[5].

Il teorema di Dirichlet può essere migliorato fino alla disuguaglianza

$$\left|\alpha - \frac{p}{n}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{5}\,n^2}\ ,$$

$$\left|\alpha - \frac{p}{n}\right| \geq \frac{c}{n^{2+\varepsilon}}$$

per ogni frazione p/n.

[5]Un numero è normale se nel suo sviluppo decimale qualsiasi blocco di cifre appare (asintoticamente) con la dovuta regolarità. Significa che, ad esempio, se indichiamo con A_N il numero di volte che la cifra 3 appare tra le prime N cifre, allora $\frac{A_N}{N} \to \frac{1}{10}$ per $N \to +\infty$. Se indichiamo con B_N il numero di volte che la terna 456 appare tra le prime N cifre, allora $\frac{B_N}{N} \to \frac{1}{1000}$. E così via.

Non è difficile riconoscere in questo la *Legge dei Grandi Numeri* (basta pensare ad una sola cifra, con il numero scritto in base 2). Nel 1909 E. Borel ha dimostrato che l'insieme dei numeri non normali ha misura 0 in $\mathbb{R}$.

Osserviamo che nessun numero razionale è normale, così come è chiaro che esistono numeri irrazionali non normali (è sufficiente che una data cifra non sia mai presente).

È difficile costruire esplicitamente numeri normali. Il primo (e il più famoso) esempio è dovuto a D. Champernowne (nel 1933): il numero

$$0{,}123456789101112131415161718192021\ldots$$

(più chiaro se scriviamo $0{,}\,1\;2\;3\;4\;5\;6\;7\;8\;9\;10\;11\;12\;13\;14\;15\;16\;17\;18\;19\;20\;21\ldots$) è normale.

dimostrata da A. Hurwitz nel 1891 (la proveremo tra poco usando le successioni di Farey).

Le successioni di Farey

Consideriamo i numeri razionali tra 0 e 1, e raggruppiamo le frazioni semplificate secondo il valore massimo dei denominatori. Fissato un intero positivo n consideriamo quindi le frazioni semplificate di denominatore $\leq n$, comprese tra 0 e 1; cioè, per ogni n, consideriamo la successione finita

$$\mathcal{F}_n = \left\{\frac{h}{k} : h, k \in \mathbb{Z}, 0 \leq h \leq k \leq n, \operatorname{mcd}(h, k) = 1\right\},$$

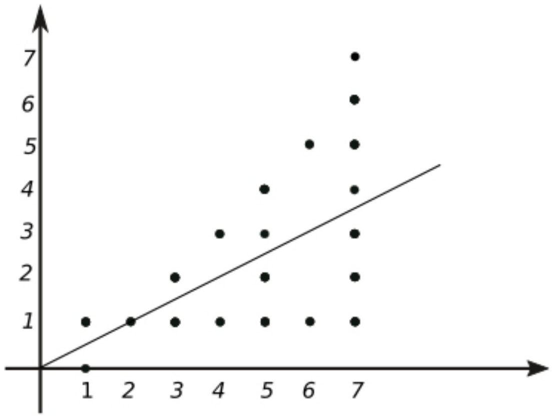
dove le frazioni sono poste in ordine crescente. Le $\mathcal{F}_n$ sono chiamate *Successioni di Farey*e e le loro proprietà furono studiate da C. Haros e A. Cauchy (ed enunciate dal geologo J. Farey) all'inizio del XIX secolo.

Scriviamo le prime successioni di Farey.

$\mathcal{F}_1$:	$\frac{0}{1}$																		$\frac{1}{1}$
$\mathcal{F}_2$:	$\frac{0}{1}$									$\frac{1}{2}$									$\frac{1}{1}$
$\mathcal{F}_3$:	$\frac{0}{1}$						$\frac{1}{3}$			$\frac{1}{2}$			$\frac{2}{3}$						$\frac{1}{1}$
$\mathcal{F}_4$:	$\frac{0}{1}$				$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{3}$			$\frac{1}{2}$			$\frac{2}{3}$		$\frac{3}{4}$				$\frac{1}{1}$
$\mathcal{F}_5$:	$\frac{0}{1}$			$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$		$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$			$\frac{1}{1}$
$\mathcal{F}_6$:	$\frac{0}{1}$		$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$		$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$		$\frac{1}{1}$
$\mathcal{F}_7$:	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{1}{1}$

Siamo abituati a rappresentare i numeri razionali (cioè le frazioni semplificate) sulla retta reale. Tuttavia i numeri razionali nascono come oggetti bidimensionali

e a volte è utile considerarli da questo punto di vista, come ad esempio nella dimostrazione della numerabilità dell'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali.
Possiamo vedere $\mathcal{F}_n$ come l'insieme dei punti interi (cioè i punti del piano cartesiano a coordinate intere) contenuti nel triangolo chiuso di vertici (0,0), $(n,0)$, (n,n) che sono *visibili dall'origine* (cioè possono essere collegati all'origine da un segmento che non incontra altri punti a coordinate intere). La figura seguente rappresenta $\mathcal{F}_7$ e vediamo, ad esempio, che i punti (4,2) e (6,3) (corrispondenti alle frazioni $2/4$ e $3/6$) non appaiono perché coperti dal punto (2,1) (che corrisponde alla frazione $1/2$).



Si può dimostrare che

$$\mathrm{card}(\mathcal{F}_n) \sim \frac{3}{\pi^2} n^2, \quad \text{per } n \to +\infty .$$

Da questo segue che la probabilità che una frazione p/n, con $0 \leq p \leq n \leq 1$, sia semplificata è $6/\pi^2 \approx 61\%$.

Ora richiamiamo e diamo un nome all'operazione incontrata nel paradosso di Simpson.

Definizione. *Date due frazioni positive h/k e h'/k', diciamo che la frazione*

$$\frac{h + h'}{k + k'}$$

è la loro Media di Farey*.*
Abbiamo visto che il numero $(h + h')/(k + k')$ è il coefficiente angolare del vettore

$$(k + k', h + h') = (k, h) + (k', h')$$

ottenuto sommando i vettori (k, h) e (k', h') attraverso la regola del parallelogrammo. Poiché la retta della diagonale di un parallelogrammo è compresa tra le rette dei due lati adiacenti otteniamo

$$\frac{h}{k} < \frac{h+h'}{k+k'} < \frac{h'}{k'} .$$

Si possono dimostrare le seguenti proprietà, di cui si suggerisce qualche verifica attraverso la precedente tabella di $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_7$.

1. Se $h/k < h'/k'$ sono termini successivi (all'interno di una riga $\mathcal{F}_n$), allora

$$kh' - hk' = 1$$

2. Se

$$\frac{h}{k} < \frac{h''}{k''} < \frac{h'}{k'}$$

   sono termini successivi (all'interno di una riga $\mathcal{F}_n$), allora

$$\frac{h''}{k''} = \frac{h+h'}{k+k'} .$$

3. Se h/k e h'/k' sono termini successivi (all'interno di una riga $\mathcal{F}_n$) allora la loro media di Farey $(h+h')/(k+k')$ è la frazione con minor denominatore tra <u>tutte</u> le frazioni strettamente comprese tra h/k e h'/k'.

Se confrontiamo la media di Farey

$$\frac{h+h'}{k+k'}$$

con la media aritmetica

$$\frac{1}{2}\left(\frac{h}{k} + \frac{h'}{k'}\right)$$

vediamo vantaggi e svantaggi. Notiamo innanzitutto la media aritmetica è indifferente alla semplificazione delle frazioni; cioè, ad esempio,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} + \frac{5}{7}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{6} + \frac{5}{7}\right) ,$$

.

Mentre non è così per la media di Farey:

$$\frac{2+5}{3+7} \neq \frac{4+5}{6+7}.$$

Pensiamo ad uno studio come quello sui calcoli renali: un risultato positivo per 20 casi su 40, piuttosto che per 2000 casi su 4000 ha lo stesso significato in termini percentuali, ma può avere un ruolo diverso quando lo si aggrega ad altri dati.
Il paradosso di Simpson ci dice che la media di Farey non è monotona, cioè può essere $\frac{h}{k} < \frac{H}{K}$ e $\frac{h\prime}{k\prime} < \frac{H\prime}{K\prime}$ ma $\frac{h+h\prime}{k+k\prime} > \frac{H+H\prime}{K+K\prime}$, mentre, ovviamente, la media aritmetica è monotona.
D'altra parte, in generale, la media di Farey ha un denominatore minore di quello della media aritmetica, e questo rende la media di Farey utile in alcuni problemi di approssimazione di numeri reali, come nella teorema di Hurwitz, che ora presentiamo. Premettiamo un

Lemma. *Dati due interi positivi m, q, le seguenti disuguaglianze non possono essere entrambe vere:*

$$\frac{1}{mq} \geq \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{m^2}+\frac{1}{q^2}\right), \qquad \frac{1}{m(m+q)} \geq \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{m^2}+\frac{1}{(m+q)^2}\right).$$

Dimostrazione del lemma. Per assurdo siano entrambe vere. Allora abbiamo

$$\sqrt{5}mq \geq m^2+q^2, \qquad \sqrt{5}m(m+q) \geq m^2+(m+q)^2.$$

Sommando otteniamo

$$\sqrt{5}(m^2+2mq) \geq 3m^2+2q^2+2mq,$$

$$4q^2+\left(6-2\sqrt{5}\right)m^2-4\left(\sqrt{5}-1\right)mq \leq 0,$$

$$\left(2q-\left(\sqrt{5}-1\right)m\right)^2 \leq 0,$$

cioè $2q = \left(\sqrt{5}-1\right)m$, che è impossibile poiché $\sqrt{5}$ è irrazionale.

∎

La dimostrazione seguente del teorema di Hurwitz dipende anche dalle proprietà delle medie di Farey viste in precedenza.

Teorema di Hurwitz. *Per ogni numero irrazionale α esistono infinite coppie di* *interi n, p tali che*

$$\left|\alpha - \frac{p}{n}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}\, n^2}\ .$$

Dimostrazione. Possiamo supporre $0 < \alpha < 1$. Per ogni intero positivo n siano h/k e h'/k' i termini successivi nella sequenza di Farey $\mathcal{F}_n$ che racchiudono α, cioè sia

$$\frac{h}{k} < \alpha < \frac{h'}{k'}.$$

Con h/k e h'/k' consecutivi e $k, k' \leq n$. Allora

$$\frac{h}{k} < \alpha < \frac{h+h'}{k+k'} \qquad \text{oppure} \qquad \frac{h+h'}{k+k'} < \alpha < \frac{h'}{k'}$$

(supponiamo di essere nel primo caso, l'altro è analogo). Mostriamo che una delle tre frazioni h/k, $(h+h')/(k+k')$ e h'/k' soddisfa $\left|\alpha - \frac{p}{n}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}\, n^2}$. Altrimenti

$$\alpha - \frac{h}{k} \geq \frac{1}{\sqrt{5}\, k^2}\,, \qquad \frac{h+h'}{k+k'} - \alpha \geq \frac{1}{\sqrt{5}\,(k+k')^2}\,, \qquad \frac{h'}{k'} - \alpha \geq \frac{1}{\sqrt{5}\,(k')^2}.$$

Sommando otteniamo

$$\frac{h'}{k'} - \frac{h}{k} \geq \frac{1}{\sqrt{5}\, k^2} + \frac{1}{\sqrt{5}\,(k')^2}\,, \qquad \frac{h+h'}{k+k'} - \frac{h}{k} \geq \frac{1}{\sqrt{5}\,(k+k')^2} + \frac{1}{\sqrt{5}\, k^2}\,,$$

e quindi, essendo h/k e h'/k' consecutivi (dunque tali che $h'k - hk' = 1$),

$$\frac{1}{kk'} = \frac{h'k - hk'}{kk'} = \frac{h'}{k'} - \frac{h}{k} \geq \frac{1}{\sqrt{5}\, k^2} + \frac{1}{\sqrt{5}\,(k')^2}\,,$$

$$\frac{1}{(k+k')k} = \frac{h'k - hk'}{(k+k')k} = \frac{(h+h')k - h(k+k')}{(k+k')k} = \frac{h+h'}{k+k'} - \frac{h}{k}$$

$$\geq \frac{1}{\sqrt{5}\,(k+k')^2} + \frac{1}{\sqrt{5}\,(k')^2}\,,$$

contro il lemma precedente. Quindi esiste una frazione p/m, con $m \leq n$, tale che

$\left|\alpha - \frac{p}{m}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{5}\,m^2}$. Al crescere di n le frazioni consecutive che racchiudono α hanno denominatori sempre più grandi. Quindi al crescere di n troviamo infinite frazioni che soddisfano $\left|\alpha - \frac{p}{m}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}\,m^2}$.

■

Costa poca fatica provare che la costante $\sqrt{5}$ non è migliorabile.

Teorema. *Sia $L > \sqrt{5}$ (e scegliamo $\alpha = \left(\sqrt{5}-1\right)/2$). Allora solo un numero finito di numeri razionali p/n soddisfa la disuguaglianza*

$$\left|\frac{p}{n} - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right| < \frac{1}{Ln^2}.$$

Dimostrazione. Assumiamo questa disuguaglianza vera per qualche $L > \sqrt{5}$ e sia

$$f(x) = x^2 + x - 1 = \left(x - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right).$$

Poiché $f(p/n) \neq 0$ abbiamo, applicando due volte la disuguaglianza che abbiamo assunto vera,

$$\frac{1}{n^2} \leq \left|\frac{p^2 + pn - n^2}{n^2}\right| = \left|\left(\frac{p}{n}\right)^2 + \left(\frac{p}{n}\right) - 1\right| = \left|f\left(\frac{p}{n}\right)\right|,$$

$$= \left|\frac{p}{n} - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right|\left|\frac{p}{n} + \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right| \leq \frac{1}{Ln^2}\left|\frac{p}{n} - \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \sqrt{5}\right| \leq \frac{1}{Ln^2}\left(\frac{1}{Ln^2} + \sqrt{5}\right).$$

Quindi

$$L \leq \frac{1}{Ln^2} + \sqrt{5}, \qquad n^2 \leq \frac{1}{L\left(L - \sqrt{5}\right)}$$

e dunque solo un numero finito di numeri razionali p/n soddisfa la disuguaglianza nell'enunciato del teorema.

■

I numeri $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ e $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ richiamano la successione di Fibonacci.

Numeri di Fibonacci e successioni di Farey

Il problema originale studiato da (Leonardo Pisano detto il) Fibonacci all'inizio del XIII secolo riguardava la riproduzione dei conigli. Iniziando con una coppia di conigli appena nati, quante coppie di conigli (maschio e femmina) ci saranno dopo un anno? Assumiamo le seguenti ipotesi.

- Un coniglio si riproduce per la prima volta dopo un mese dalla nascita e in seguito ogni mese. Chiamiamo mature le coppie di conigli di età non inferiore ad un mese.
- La gestazione dura un mese, al termine del quale una femmina partorisce un maschio e una femmina.
- I conigli non muoiono.

Vediamo la situazione ad ogni mese (mese significa *inizio mese*).
Mese 1. C'è una coppia di conigli appena nati.
Mese 2. C'è una coppia matura.
Mese 3. Ci sono una coppia matura e una coppia appena nata.
Mese 4. Ci sono due coppie mature e una coppia appena nata.
Mese 5. Ci sono tre coppie mature e due coppie appena nate.
Mese 6. Ci sono cinque coppie mature e tre coppie appena nate.
…

A questo punto la legge è chiara. Nel mese $n+1$ ci sono tutte le coppie del mese n più tutte le coppie nate nel mese n, e queste ultime sono tante quante le coppie mature al mese n, che a loro volta sono tante quante le coppie (senza aggettivi) al mese $n-1$. Se indichiamo con F_n il numero delle coppie di conigli presenti al mese n otteniamo la legge

$$\begin{cases} F_1 = F_2 = 1 \\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \qquad \text{se } n \geq 2, \end{cases}$$

da cui

$$\{F_n\}_{n=1}^{+\infty} = \{1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,\dots\}$$

In particolare, dopo un anno abbiamo $F_{12} = 144$ coppie di conigli.

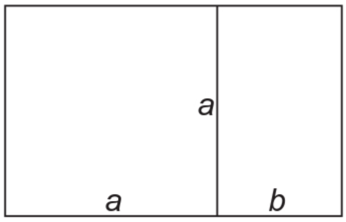
Esiste una scrittura esplicita per F_n:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}.$$

Il numero $(1+\sqrt{5})/2$ è chiamato *sezione aurea* e indica il rapporto a/b fra due numeri positivi soggetti alla condizione

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}.$$

Infatti, scrivendo $x = a/b$, l'uguaglianza precedente diventa $x = 1 + 1/x$, cioè $x^2 - x - 1 = 0$, che ha $\left(1+\sqrt{5}\right)/2$ come unica radice positiva.



L'uguaglianza $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$ significa che nella figura precedente il rettangolo grande, i cui lati misurano $a + b$ e a, è simile al rettangolo a destra, ottenuto togliendo il quadrato di lato a.
Un rettangolo il cui rapporto tra i lati è uguale alla sezione aurea è detto *Rettangolo Aureo* e non è difficile incontrarlo in varie manifestazioni della natura e dell'arte.

Terminiamo mostrando una connessione tra i numeri di Fibonacci e le medie di Farey. Scriviamo per questo i numeri di Fibonacci nella forma

$$\left\{\frac{F_n}{F_{n+1}}\right\}_{n=1}^{+\infty} = \left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \frac{21}{34}, \frac{34}{55}, \frac{55}{89}, \frac{89}{144}, \frac{144}{233}, \dots\right\}$$

Si può dimostrare che tutte queste frazioni sono comprese tra 1/2 e 1 e sono semplificate. Inoltre, essendo

$$\frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{F_{n-1} + F_{n-2}}{F_n + F_{n-1}}$$

la frazione $\frac{F_n}{F_{n+1}}$ è la media di Farey delle due frazioni $\frac{F_{n-1}}{F_n}$ e $\frac{F_{n-2}}{F_{n-1}}$ che la precedono.

Giancarlo Travaglini
Dipartimento di Matematica e Applicazioni,
Università degli Studi di Milano-Bicocca

Chi Siamo

Vai alla Home-Page della Rivista

Vai alla Sezione SCIENZAinATTO

Vai agli SPECIALI della Rivista

EMMECI quadro
Scienza Educazione E Didattica

DIRETTORE RESPONSABILE Mario Gargantini
www.emmeciquadro.eu

Aut. Trib. Milano n. 226 del 24.3.2000
ISSN 2240-0389
Emmeciquadro (online)