

MATEMATICA, SCIENZA E DETERMINISMO

di Luca Granieri *

Un percorso, molto essenziale, mostra alcune tappe del complesso intreccio, in ambito matematico e fisico, fra due paradigmi caratteristici dell'itinerario scientifico dal Seicento ad oggi, quello deterministico e quello indeterministico.

Una riflessione che, toccando alcuni aspetti importanti di questa problematica attuale, può rappresentare una guida al lettore per specifici approfondimenti personalizzati, in ambito matematico-fisico.

* Dottore di ricerca in matematica, svolge attività didattica e di ricerca presso l'Università "Federico II" di Napoli

Uno dei compiti fondamentali della scienza è quello di ricercare le cause dei fenomeni (effetti). Tipicamente, si riconosce come causa un fenomeno che precede temporalmente il suo effetto *determinandolo univocamente*. Ovvero, si riconosce che da una stessa causa che agisca nelle stesse date condizioni, segue sempre uno e un solo identico effetto.

Così, se si spara un proiettile, a parità di condizioni (inclinazione della pistola, condizioni meteo, eccetera) questo seguirà sempre la stessa traiettoria (colpendo un dato bersaglio per esempio). Quanto appena descritto è il contenuto della cosiddetta *causalità deterministica*, tipica della fisica classica.

Il problema del determinismo è molto importante e per certi versi controverso, per esempio rispetto alla sua (del determinismo) validità. Nel cosiddetto *meccanicismo*, per esempio, si assume un determinismo in senso forte, anzi fortissimo.

Il *Postulato deterministico (forte)* recita: lo stato dell'Universo a un certo tempo è completamente determinato dalle sue condizioni (iniziali) in un qualsiasi altro tempo precedente. Come per esempio il moto di un proiettile è completamente determinato dalla posizione, dalla velocità al momento dello sparo e anche dalle caratteristiche dell'atmosfera nella zona in cui avviene lo sparo.

Pertanto, nell'ottica meccanicistica, il funzionamento dell'Universo segue un rigido e determinato meccanismo senza nessuna possibilità di svincolarsi dalle inesorabili leggi che lo governano. Ma, se tutto è necessaria conseguenza degli stati precedenti, anche il nostro comportamento e tutto quello che facciamo o pensiamo è conseguenza di quanto accaduto tempo fa.

Allora non c'è scampo, il nostro destino è segnato sin dalla nascita e le nostre scelte sono soltanto il risultato delle condizioni dell'Universo che ci hanno preceduto. Quello che chiamiamo *libero arbitrio* sarebbe allora soltanto un'illusione, per quanto persistente.

D'altra parte, un filosofo come David Hume (1711-1776) sosterebbe probabilmente



un determinismo in senso più debole, anzi debolissimo, negando qualsiasi relazione causa-effetto nei fenomeni naturali. Per un'interessante panoramica su alcune questioni connesse al determinismo si veda per esempio il contributo di Alberto Strumia (1950-...) in [7].

Aspetti matematici

Il determinismo classico si fonda essenzialmente sulla possibilità di risolvere un'equazione (differenziale) corredata dalle cosiddette condizioni iniziali e/o condizioni al contorno. Tecnicamente, si tratta del cosiddetto *Problema di Cauchy*.

Per esempio, il problema di Cauchy sul moto del proiettile si ottiene considerando l'equazione della dinamica di Newton corredata dalla posizione e dalla velocità del proiettile al momento dello sparo. L'unica soluzione del problema di Cauchy stabilisce univocamente il comportamento del proiettile e, in questo senso, il destino del proiettile è univocamente determinato da quanto accaduto al momento dello sparo. Similmente, data la legge di gravitazione universale, risolvendo l'equazione del moto si trova per esempio che la Terra, trascurando la presenza degli altri corpi celesti, orbita intorno al Sole descrivendo un'ellisse in accordo con le tre leggi di Keplero.

Dunque, il determinismo classico riposa sulla fiducia di poter risolvere problemi di Cauchy. Ma le cose si complicano presto. Basta aggiungere qualche altro pianeta, come è di fatto nel caso del sistema solare, per rendere il corrispondente problema di Cauchy estremamente difficile.

Si tratta del cosiddetto *Problema degli N corpi* che a tutt'oggi è ancora oggetto di numerosi studi sia teorici sia applicativi. (si veda [9]).

Curiosamente, anche nel paradigma strettamente deterministico, quando si sa risolvere un problema di Cauchy la soluzione è, come si dice, *locale*.

Ciò significa che è definita in un intervallo di tempo centrato nell'istante iniziale. Ovvero che la soluzione è determinata nell'immediato, se non nell'intero, futuro come pure nel passato.

Questo aspetto è proprio quello che si utilizza per ricostruire il passato alla luce del presente, come potrebbe fare un esperto di balistica convocato dalla polizia per ricostruire il moto di un proiettile, risalendo al luogo da cui è stato sparato, esaminando la scena del delitto.

Inoltre, se ammettiamo che lo stesso futuro abbia già in qualche modo una sua costituzione, come tra l'altro la Teoria della relatività di Albert Einstein (1879-1955) suggerisce, allora si potrebbe anche ribaltare la questione affermando che è piuttosto il futuro a determinare il presente (e il passato). Se questo è il caso, probabilmente avvertiremmo questo determinismo come una sorta di *finalismo* (si veda anche [8]). Questo determinismo dal futuro al passato è per esempio un caposaldo della presentazione di Frank Jennings Tipler (1947-...) della *teologia come branca della fisica*.

Comunque, i principi finalistici non sono nuovi nella scienza. Basti pensare alla lunga e importante storia dei *principi variazionali* secondo i quali la natura si *orienterebbe* cercando di massimizzare o minimizzare (o rendere stazionaria) qualche quantità rilevante. Uno dei più noti è ad esempio il cosiddetto *Principio di Fermat* secondo il quale la luce *sceglie* nel suo moto la traiettoria che rende minimo il tempo di percorrenza (si veda [3,4] per una introduzione a questi temi).

Dunque, da questo punto di vista passato e futuro sembrano perfettamente scambiabili tra loro. Talvolta le soluzioni del problema di Cauchy non fanno differenza tra passato e futuro. In effetti, le equazioni (differenziali) della fisica sono in genere indifferenti allo scambio temporale tra passato e futuro. Per esempio ciò accade per l'equazione del moto di Newton $F = ma$ in quanto l'accelerazione a , che è la derivata seconda dello spostamento, resta invariata scambiando il tempo t con $-t$.

Ma per noi passato e futuro sono intrinsecamente differenti, e il tempo sembra scorrere inesorabilmente dal passato verso il futuro.

Da dove nasce questa asimmetria tra passato e futuro? Tale questione è strettamente correlata al cosiddetto problema della *freccia del tempo* che tenta di conciliare tale asimmetria, codificata in modo paradigmatico nel *secondo principio della termodinamica*, con la fisica fondamentale.

In ogni caso, potrebbe anche questa essere una tenace illusione, come del resto ritengono molti fisici. Oppure il determinismo deve essere un po' più debole di così. Magari consentendo qualche forma di *libero arbitrio*.



Augustin-Louis Cauchy
(1789-1857)

Determinismo e previsione

Chiaramente, se dei fenomeni non può essere ricercata una causa più o meno precisa, ogni tentativo di previsione sarebbe vano sin dal principio. Se invece confidiamo nel fatto che a una data causa segue sempre un determinato effetto, allora c'è qualche speranza di prevedere qualche evento anche più o meno complesso. Dunque, non c'è previsione senza un qualche determinismo. Ma i due concetti non sono sinonimi.

Anche in un mondo deterministico, non è detto che si possa prevedere sempre. In altre parole il futuro potrebbe anche essere perfettamente determinato, ma questo non significherebbe che lo potremmo conoscere completamente. E questo per diverse ragioni, alcune delle quali discuteremo brevemente.

Dal punto di vista matematico, il determinismo dipende come accennato dalla possibilità di risolvere univocamente un problema di Cauchy.

Si tratta dunque di un problema di esistenza e unicità della soluzione. Ma non sempre i problemi di Cauchy ci fanno il favore di ammettere un'unica soluzione! La non unicità della soluzione significa che a parità di condizioni iniziali il nostro fenomeno potrebbe presentare scenari differenti, indebolendo di conseguenza le nostre possibilità di previsione.

Questo aspetto è importante ad esempio nelle cosiddette equazioni di Navier-Stokes che modellizzano la dinamica dei fluidi, e per le quali anche la sola unicità delle soluzioni costituisce un problema rilevante.

La soluzione completa di tali equazioni vale addirittura un milione di dollari! (si veda [9, 1]). Ma anche nei casi di esistenza e unicità le cose non sempre filano lisce. Intanto c'è sempre la problematica legata al fatto che una cosa è conoscere o sapere che esiste una soluzione in teoria, e un'altra determinarla in pratica. Inoltre, tutte le nostre misure sono approssimate e dunque potremmo conoscere qualunque soluzione solo in modo più o meno approssimato.

Pertanto, ci dobbiamo comunque accontentare di una previsione più o meno approssimata nella realtà. E spesso queste previsioni funzionano. Così il giocatore di biliardo, pur non potendo colpire la biglia sempre nello stesso identico modo, sa che se colpisce più o meno in un certo modo, allora la biglia farà più o meno una certa traiettoria andando in buca.

La possibilità di fare queste previsioni è legata, matematicamente parlando, al problema della *dipendenza continua dai dati iniziali* o di *buona positura* del problema di Cauchy.

Un problema di Cauchy è ben posto se le soluzioni dipendono con continuità dai dati iniziali. Ovvero, grosso modo, se le condizioni iniziali cambiano di poco, allora anche le soluzioni cambiano di poco. Se il giocatore di prima colpisce la biglia appena più o destra o a sinistra, o appena più piano o più forte, allora la biglia farà più o meno la stessa cosa.

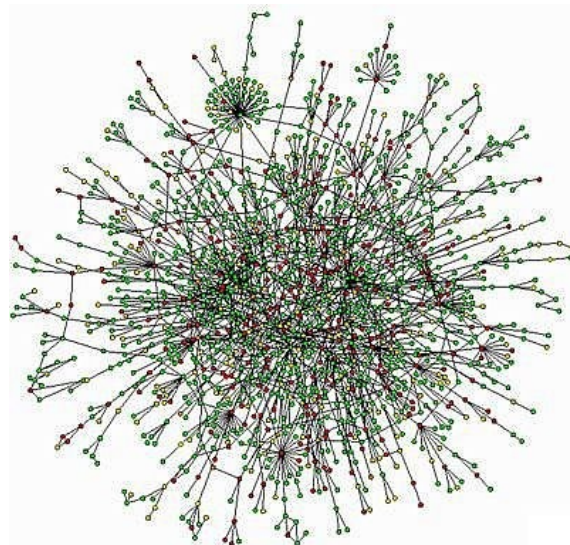
Ma i problemi di Cauchy non sono sempre ben posti. Anche per sistemi relativamente semplici, come per un *pendolo doppio*, ben presto il sistema diventa piuttosto imprevedibile, pur essendo perfettamente determinato.

O basterebbe considerare biliardi dalla geometria appena più complicata (si veda [3]). Per non parlare di sistemi più complessi, come i fenomeni atmosferici, che contemplan il celebre *effetto farfalla* per cui il battito d'ali di una farfalla può determinare un uragano da qualche parte del mondo.

Si tratta del cosiddetto *caos deterministico*, caratteristico dei cosiddetti *sistemi non-integrabili*, per cui piccole discrepanze nella nostra conoscenza del sistema determinano grosse differenze nell'evoluzione futura, anche se il sistema è perfettamente deterministico, minando le nostre possibilità di previsione (si veda [2,3]). Anzi, i fenomeni caotici sono piuttosto la norma:

«Ciò non toglie che per lungo tempo si sia creduto che le caratteristiche dei sistemi completamente integrabili, come la prevedibilità o la stabilità, fossero generali. Quella che oggi si definisce teoria del caos non è altro che la presa di coscienza di quest'errore, inscritto per due secoli nella nostra educazione.

Tutto questo è molto naturale: si può studiare solo ciò che si ha sotto



gli occhi, si può insegnare solo quello che si sa. L'immagine del mondo offerta dai sistemi completamente integrabili è la stessa che avranno gli scienziati, a eccezione di qualche genio come Poincaré, e che essi trasmetteranno attraverso l'insegnamento e la divulgazione.[...]

Ciò che la meccanica classica avrebbe dovuto insegnarci è che tutto è causa di tutto: non è possibile isolare serie di causalità particolari che farebbero dipendere certi eventi da certi altri e non dalla totalità del divenire.

Invece, è accaduto tutto il contrario: a seguito dell'attenzione esclusiva rivolta ai sistemi completamente integrabili, si è accreditata l'idea che gli eventi si sistemino naturalmente in catene in cui ogni maglia è la causa della seguente e l'effetto della precedente, e che queste catene si svolgano le une parallelamente alle altre (si veda [3] p. 112)».

Determinismo e probabilità

E le cose si complicano ulteriormente nella fisica moderna.

Molti fenomeni, come il decadimento radioattivo di un certo atomo, sembrano avvenire senza una causa precisa. Talvolta si sente dire che la fisica moderna, in particolare la meccanica quantistica, è *indeterministica*.

Ma questo è a nostro avviso leggermente fuorviante. Le equazioni della meccanica quantistica sono deterministiche! Perlomeno dal punto di vista matematico.

Non si capisce come farebbero altrimenti gli scienziati a confrontare i risultati degli esperimenti con le previsioni teoriche. Il fatto è che a essere determinate sono delle probabilità. Così non si può dire se un singolo atomo decadrà o meno, ma soltanto che lo farà con una ben precisa probabilità. Allora, la questione del determinismo è legata al significato di *probabilità*.

Se per probabilità si intende *la misura della nostra ignoranza*, allora c'è comunque un determinismo che noi poveri mortali trattiamo come probabilità soltanto a causa dei nostri limiti conoscitivi.

Così, quando lanciamo una moneta, magari la sua traiettoria sarà anche completamente determinata dal lancio, ma il fenomeno è talmente complesso che dobbiamo accontentarci di un approccio probabilistico, stabilendo che la probabilità che la moneta cada sulla testa o sulla croce è del 50%.

Allora, possiamo allestire degli esperimenti per valutare che su un grande numero di lanci il numero di teste e croci sarà più o meno lo stesso. Ma per Dio, diciamo così, il lancio di ogni singola moneta sarebbe perfettamente determinato.

Quanto ora delineato potrebbe anche essere il caso della meccanica quantistica. Questa possibilità è legata alla cosiddetta *teoria dei molti mondi* o del *multiverso*. In questo senso, la meccanica quantistica coinvolgerebbe probabilità soltanto perché noi, poveri mortali, non abbiamo accesso a tutti gli (ipotetici) mondi paralleli. Ma per Dio, che vedrebbe contemporaneamente tutto il *multiverso*, anche il decadimento di un singolo atomo sarebbe perfettamente determinato.

Oppure la probabilità è in qualche modo intrinseca alla natura, come sembra suggerire la cosiddetta interpretazione *standard* (o *di Copenaghen*) della meccanica quantistica. Solo in questo senso si potrebbe forse parlare di un certo *indeterminismo* della fisica moderna.

«In effetti, molti filosofi ritengono che non abbia senso chiedersi se l'Universo sia deterministico o indeterministico. Può essere entrambe le cose, a seconda della grandezza o della complessità dell'oggetto studiato [...] Ma Einstein e i suoi contemporanei dovevano risolvere un problema serio. I fenomeni quantistici sono casuali, la teoria quantistica però non lo è. L'equazione di Schrodinger è deterministica al cento per cento [...] Si dice che la meccanica quantistica sia non deterministica, ma è un giudizio frettoloso [...]. Il mondo è una torta a strati composta di determinismo e indeterminismo» (si veda [6]).

Luca Granieri

(Dottore di ricerca in matematica, svolge attività didattica e di ricerca presso l'Università "Federico II" di Napoli)

Indicazioni bibliografiche

- [1] K. Devlin, *I problemi del millennio*, Longanesi, Milano 2004.
- [2] I. Ekeland, *Come funziona il caos*, Bollati Boringhieri, Torino 2010.
- [3] I. Ekeland, *Il migliore dei mondi possibili*, Bollati Boringhieri, Torino 2001.
- [4] L. Granieri, *Ottimo in Matematica. Studi progressivi per (quasi) tutti*, La Dotta, Casalecchio di Reno, 2016.
- [5] L. Granieri, *Sull'eterno ritorno*, Archimede 1 (2015), pp. 20-21.
- [6] G. Musser, *L'Universo è casuale?*, Le Scienze N. 367 Novembre 2015.
- [7] AA. VV., *Conversazioni su scienza e fede*, Lindau, Torino 2012.
- [8] P. Odifreddi, *La legge della pigrizia cosmica*, Le Scienze N. 566, Ottobre 2015.
- [9] I. Stewart, *I grandi problemi della matematica*, Einaudi, Torino 2014.
- [10] F.J. Tipler, *La fisica del cristianesimo*, Mondadori, Milano 2008.