EMMECI quadro
Scienza Educazione E Didattica

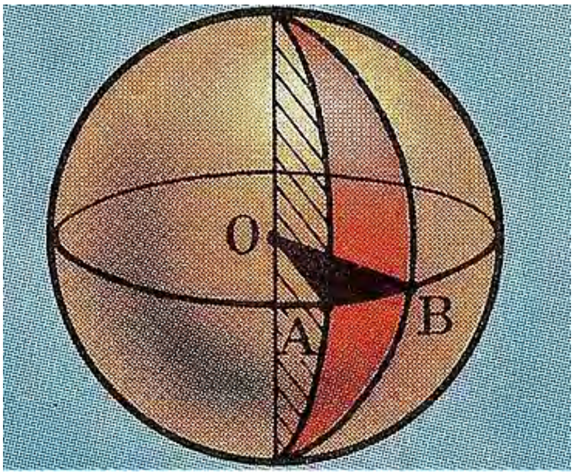
n. 58
settembre 2015

AREA DELLA SUPERFICIE SFERICA

*di Simone Rota **

** Studente del quarto anno del liceo Scientifico "Don Carlo Gnocchi" di Carate Brianza (MB))*

L'autore, studente della classe IV del Liceo Scientifico nell'anno scolastico 2013-2014, propone un suo tentativo di dimostrazione della relazione per il calcolo dell'area della superficie sferica, con un metodo approssimato, adeguato alle sue conoscenze che non includono l'analisi infinitesimale. Attualmente frequenta il primo anno del corso di laurea in Fisica dell'Università di Milano.
Una introduzione degli insegnanti aiuta a comprendere il senso di questo tentativo.



Il contributo che proponiamo (Daria Frigerio e Paola Balzarotti, Insegnanti di Matematica e Fisica) è esito del lavoro di un nostro alunno, Simone Rota, che, al termine del percorso sulla geometria solida in quarta liceo scientifico, ha cercato un modo per ricavare la ben nota espressione per l'area della superficie sferica in funzione del suo raggio. Solitamente, nell'anno di quarta, deduciamo dal principio di Cavalieri la misura del volume della sfera, mentre rimandiamo all'anno di quinta la dimostrazione per la formula che esprime la misura dell'area della superficie sferica. Nel suo calcolo Simone ha dovuto introdurre alcune approssimazioni, anticipando implicitamente l'idea del passaggio al limite, perché non disponeva ancora degli strumenti dell'analisi matematica che gli avrebbero consentito di condurre la dimostrazione in modo rigoroso.
Ci sembra un contributo interessante, non tanto per il rigore formale della dimostrazione, ma in quanto segno di un atteggiamento di fronte a un problema che, anche nel caso di un intelletto brillante, crediamo esito di una educazione. I ragazzi, abituati a dimostrare tutto, sono sempre meno disposti a rinunciare al livello dimostrativo, ne avvertono la necessità e, pur di non dover dare per scontato un risultato anche noto, mettono in gioco tutte le conoscenze acquisite e le capacità maturate perché sia convincente.
Questa per noi insegnanti e per i nostri alunni è la più bella soddisfazione, perché, citando il matematico Hans Freudenthal (1905-1990) «il senso comune accetta le cose come garantite, per buone e anche per cattive ragioni. La matematica cerca e chiede le ragioni, come ogni altra scienza e forse cerca delle ragioni migliori di ogni altra scienza» [*Ripensando l'educazione matematica*, La Scuola, Brescia 1994]

Uno studente alla prova

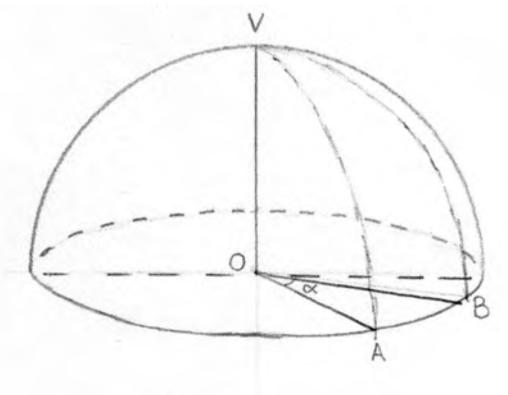
Il lavoro che presento è stato condotto nell'ambito dello studio della geometria solida in quarta liceo scientifico, da cui è scaturito l'interesse a elaborare una dimostrazione per la formula della superficie della sfera, che veniva data per nota. L'intento è quello

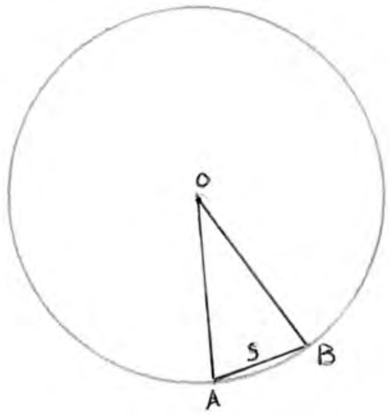
di calcolare l'espressione della superficie della sfera con mezzi algebrici (senza il formalismo del limite e dell'integrale, che vengono qui affrontati con un ragionamento intuitivo) tramite l'approssimazione geometrica dell'eguaglianza fra un arco di circonferenza e la corda a esso corrispondente.
Passando attraverso un'opportuna costruzione geometrica utilizzo tale approssimazione per fornire un'espressione della superficie della sfera, risolvendola poi con mezzi algebrici (con l'unica eccezione per la quale si dà per nota l'area sottesa dal grafico della funzione coseno fra 0 e $\pi/2$).

Un metodo di calcolo dell'area della superficie sferica

Per il calcolo dell'area della superficie sferica, costruisco un metodo da applicare a una semisfera: trovata l'area di quest'ultima, è immediato passare all'area della superficie sferica.
Prendo in considerazione una semisfera: chiamo O il centro del cerchio massimo che la definisce e V l'intersezione fra la semisfera e la perpendicolare al piano del cerchio massimo passante per O.
Divido il cerchio massimo in un numero $4k$ di spicchi congruenti (con k che appartiene a $\mathbb{Z}^+$), chiamo α l'angolo di uno spicchio e s la corda che esso sottende.
Per le approssimazioni che farò, scelgo un *k* molto grande, da cui deriva un α molto piccolo e il fatto che l'arco sotteso possa essere considerato molto prossimo alla corda (cioè a s).

$$\alpha = \frac{2\pi}{4k} \qquad [1]$$





In base alle ipotesi adottate posso scrivere la seguente relazione:

$$s = AB \approx \frac{2\pi r}{4k} \qquad [2]$$

Tracciamo i piani passanti per $\mathrm{V, O, A}$ e per $\mathrm{V, O, B}$, che risultano essere perpendicolari al piano di base. Otteniamo così, sulla superficie della semisfera, il semispicchio VOAB.

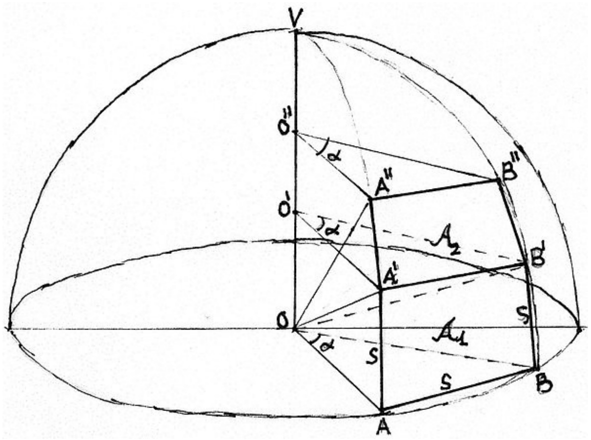
Calcolo dell'area dei trapezi che coprono il semispicchio

Calcolo ora l'area del semispicchio VOAB. Per farlo lo «tappezzerò» con dei trapezi opportunamente costruiti e dirò che per α tendente a zero, l'area della superficie dello spicchio tende alla somma delle superfici dei trapezi *(come nella figura alla pagina seguente)*.
Riporto α sul piano VOA con vertice in O e un lato *OA*, ottengo così sull'arco *AV* l'arco *AA'*.

$$\overline{AA'} = \overline{AB} = s$$

Allo stesso modo riporto α sul piano VOB con vertice in O e un lato *OB*.

$$\overline{BB'} = \overline{AB} = s$$



Traccio il trapezio ABB'A' e chiamiamo la sua area A_1 che vale:

$$A_1 = \frac{h(\overline{AB} + \overline{A'B'})}{2}$$

avendo indicato con *h* l'altezza del trapezio di basi *AB* e *A'B'*.

Per angoli α piccoli, posso considerare la corda *AA'* approssimabile con l'arco *AA'*, quindi formante con *AB* un angolo prossimo a $\pi/2$. L'altezza *h* pertanto, si può considerare molto prossima ad *AA'*.
Quindi:

$$h = AA' = s$$

Devo ora determinare *A'B'*. Per calcolarlo, traccio da A' e B' le perpendicolari a *VO* che intersecano *VO* in O'; il semispicchio è definito come intersezione di un diedro e una semisfera, e gli angoli staccati da un diedro su due piani paralleli sono congruenti.
OA, *BO*, *B'O'* e *A'O'* sono perpendicolari a *VO* quindi i piani OAB e O'A'B' sono paralleli. Per questo gli angoli che il diedro stacca su di essi, ovvero $A\hat{O}B$ e $A'\hat{O}'B'$ sono congruenti.

$$A\hat{O}B = A'\hat{O}'B' = \alpha$$

I triangoli AOB e A'O'B' sono simili perché triangoli isosceli con angoli al vertice uguali.

$$\frac{OA}{AB} = \frac{O'A'}{A'B'}$$

da cui:

$$A'B' = AB\frac{O'A'}{OA} \qquad [3]$$

OA e *O'A'* sono paralleli perché entrambi perpendicolari a *VO* e appartenenti allo stesso piano, $A\hat{O}A' = O\hat{A}'O'$ perché angoli alterni interni formati da due rette parallele tagliate da una trasversale.

$$O\hat{A}'O' = \alpha$$

$$\frac{O'A'}{OA} = cos\,(O\hat{A}'O') = cos\alpha$$

Da quest'ultima relazione e dalla [3] si ottiene:

$$A'B' = AB\cos\alpha = s\cos\alpha \qquad [4]$$

Posso ora calcolare A_1:

$$A_1 = h\,\frac{(AB + A'B')}{2} = s\,\frac{(s + s\,cos\alpha)}{2} = \frac{s^2}{2}(1 + cos\alpha) \qquad [5]$$

Procedo nel costruire il secondo trapezio con lo stesso metodo, che poi ripeterò per tutti gli altri.
Riporto α su AOV con lato *OA'* e su BOV con lato *B'O*, troviamo A'' e B'' e traccio il trapezio A'B'B''A''; chiamo la sua area A_2.

$$A_2 = h\,\frac{(A'B' + A''B'')}{2}$$

Se adotto le stesse approssimazioni di cui sopra, $h \approx s$; ho già calcolato *A'B'* e per calcolare *A''B''* procedo come sopra.
Trovo il triangolo A''B''O'' ~ AOB, questa volta l'angolo OA''O'' è 2α, quindi $O''A''/OA = \cos 2\alpha$

$$A''B'' = AB\cos 2\alpha = s\cos 2\alpha$$

$$A_2 = s\,\frac{(s\cos\alpha + s\cos 2\alpha)}{2} = \frac{s^2}{2}(\cos\alpha + \cos 2\alpha) \qquad [6]$$

Procedendo nello stesso modo nel disegnare gli altri trapezi e nel calcolarne l'area, trovo che l'area A_n dell'*n*-esimo trapezio è data da:

$$A_n = \frac{s^2}{2}(\cos((n-1)\alpha) + cos(n\alpha)) \qquad [7]$$

Posso procedere fino a «tappezzare» tutto il semispicchio, ottenendo così k trapezi. Infatti dividendo l'angolo giro per α ottengo $4k$ (relazione [1]), dividendo $V\hat{O}A = \pi/2$ per il medesimo α ottengo k angoli a cui corrispondono k trapezi.
k per definizione è un numero intero, quindi coprirò tutto il semispicchio senza avanzi, perché riportando per la k-esima volta α su VOA uno dei due lati dell'angolo andrà a coincidere con VO.

Calcolo dell'area totale dei trapezi che coprono il semispicchio

L'area totale che è la somma di tutte le aree dei trapezi può essere infine espressa dalla relazione:

$$A_{TOT} = \frac{s^2}{2}[(1 + \cos\alpha) + (\cos\alpha + \cos 2\alpha) + (\cos 2\alpha + \cos 3\alpha) \ldots. + (\cos(k-1)\alpha + \cos k\alpha)]$$

Applicando la proprietà commutativa la suddetta area può essere riscritta nella forma:

$$A_{TOT} = \frac{s^2}{2}[(1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \cdots + \cos(k-1)\alpha) + (\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \cdots + \cos(k-1)\alpha + \cos k\alpha)]$$

essendo:

$\alpha = \frac{2\pi}{4k}$ dalla [1]

$s = AB \approx \frac{2\pi r}{4k} = \frac{2\pi r\,\alpha}{2\pi} = r\alpha$ dalla [2]

Pertanto l'area totale A_{TOT} diventa:

$$A_{TOT} = \frac{(r\alpha)^2}{2}[(1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \cdots + \cos(k-1)\alpha) + (1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \cdots + \cos(k-1)\alpha + \cos k\alpha)] =$$
$$= \frac{r^2\alpha}{2}[\alpha(1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \cdots + \cos(k-1)\alpha) + \alpha(\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \cdots + \cos(k-1)\alpha + \cos k\alpha)]$$

Analizzo la prima parte della precedente espressione, ossia il termine:

$$\alpha(1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos(k-1)\,\alpha)$$

Qui si trova l'angolo α moltiplicato di volta in volta per il coseno dei multipli dello stesso α da 0 a $\pi/2$, escluso $\pi/2$.
Posso vedere come, opportunamente rappresentato, ciò può essere visto come il *plurirettangolo* inscritto nella regione piana limitata dal grafico della funzione coseno con gli assi cartesiani. Per angoli α molto piccoli questa è approssimabile all'area sottesa dal grafico della funzione coseno.
Sempre per angoli molto piccoli la mancanza di un termine $\cos(k\alpha)$ non ha influenza significativa sul risultato finale.
Si può quindi dire che la prima sommatoria è uguale all'area sottesa dal coseno fra 0 e $\pi/2$, che vale 1. Perciò:

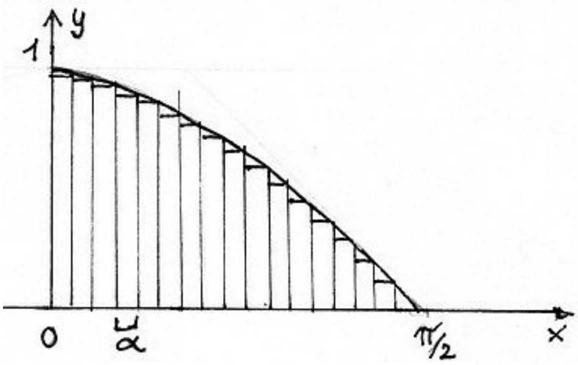
$$\alpha(1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos(k-1)\,\alpha) = 1$$

Posso trattare in modo analogo il secondo termine:

$$\alpha(\cos\alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos(k-1)\,\alpha + \cos k\alpha)$$

Qui si ha la stessa situazione, tranne per la mancanza del termine 1 che, però, è $\cos(0 \cdot \alpha)$ mentre è presente il termine $\cos(k\alpha)$.
Ma come già detto prima, per angoli α molto piccoli questi termini non sono influenti nella sommatoria, che quindi, per lo stesso ragionamento di prima, risulta di nuovo essere uguale all'area sottesa dal coseno fra 0 e $\pi/2$.

$$A_{TOT} = \frac{r^2\alpha}{2}(1+1) = r^2\alpha$$



Dall'area del semispicchio a quella della superficie sferica

Ho trovato l'area di un semispicchio. Per trovare l'area della superficie della semisfera, moltiplico per il numero di semispicchi in cui la semisfera è stata divisa, che per costruzione è $4k$.

$$A_{SEMISFERA} = A_{TOT} \cdot 4k = r^2 \cdot \alpha \cdot 4k$$

Ma ricordando che: $\alpha \cdot 4k = 2\pi$ (dalla [1]) si ottiene, per l'area della superficie della sfera il ben noto risultato:

$$A_{SFERA} = 4\,\pi\, r^2$$

Simone Rota
(Studente del quarto anno del liceo Scientifico "Don Carlo Gnocchi" di Carate Brianza (MB))

EMMECI quadro
Scienza Educazione E Didattica

DIRETTORE RESPONSABILE Mario Gargantini
www.emmeciquadro.eu

Aut. Trib. Milano n. 226 del 24.3.2000
ISSN 2240-0389
Emmeciquadro (online)