EMMECI quadro
Scienza Educazione E Didattica

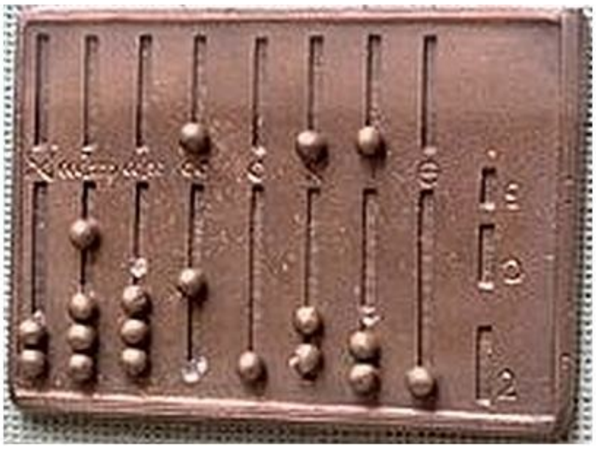
n. 52
marzo 2014

ORIGINE COMUNE DEI DECIMALI E DELLE FRAZIONI

*di Anna Paola Longo**

** Dipartimento di Matematica del Politecnico di Torino*

L'autore precisa alcuni contenuti matematici non sempre evidenti, sottesi ai temi della scuola primaria, certamente legati alla questione della continuità tra la primaria e la secondaria. Senza affrontare in questa sede le questioni generali di metodo legate all'insegnamento nei due ordini di scuola, già esaminate in molti articoli pubblicati su questa rivista e su articoli e testi segnalati sul sito dell'Associazione Ma.P.Es., in questo contributo propone una strada in gran parte intuitiva, vicina ai tempi e ai modi della scuola primaria, nell'ottica della «reinvenzione guidata».



Abaco di epoca romana - Magonza, Museo RGZ, ricostruzione del 1977

I primi numeri che si insegnano ai bambini sono i numeri naturali (cioè gli interi positivi), legati al contare in insiemi discreti (cioè fatti di unità separabili, come palline, caramelle, matite). A questi si aggiunge ben presto lo zero, dotato di molti significati che emergono con le operazioni e con la scrittura decimale posizionale (*Longo, 2002*). Si *insegna* (con tutta la varietà di esperienze e di metodo legata a questo termine) anche a rappresentare i naturali su una semiretta orientata, fissando un punto O (detto origine), un punto U (detto unità); il verso da O ad U è lo stesso fissato come positivo sulla semiretta, indicato dalla freccia, il segmento OU è l'unità di misura per i segmenti:

Questa rappresentazione pone una identificazione tra i numeri naturali e *alcuni* punti della semiretta. Si ricordi che questa rappresentazione non è intuitiva, perché il passo più spontaneo sarebbe associare il numero non a un punto, ma a un segmento avente il primo estremo in O e il secondo variabile sulla retta, segmento di cui quel numero esprime la misura.
Ciascuno dei segmenti, dal punto (o numero) n fino al punto (o numero) n+1, è lungo quanto l'unità di misura fissata. Tra le esperienze introduttive, ricordo quella di contare i passi mentre si cammina su una linea tracciata in terra, muovendosi in un verso fissato, seguita dal racconto e dalla sua rappresentazione grafica.

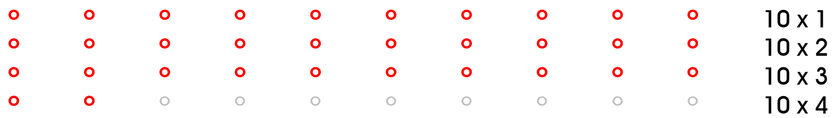
L'incontro con il continuo

Nella scuola primaria i bambini incontrano presto problemi interessanti in cui non bastano i numeri interi, come misurare una quantità continua o dividere in n parti uguali un numero che non sia il prodotto di due naturali (*Longo, 2010*). In questi casi non è più adeguata la prima definizione di divisione come cammino inverso della moltiplicazione, che ci riporta alla tavola pitagorica. La necessità di dare risposta a problemi significativi su insiemi continui (cioè non discreti, in cui si possono fare *piccole* parti con suddivisioni successive) ci obbliga a *inventare* nuovi strumenti matematici. Il percorso storico è stato una invenzione, per noi è solo una «reinvenzione».

Divisioni con resto

Esaminiamo la divisione 25 : 3; cerchiamo anzitutto di rappresentarla, per esempio mediante una distribuzione di 25 segni in gruppi di 3:

I gruppi di 3 si vedono sulle colonne della tabella, l'ultima colonna non contiene 3 elementi ma uno solo. In questo modo risulta visivamente evidente che 25 non è un multiplo di 3 (si dice anche che non è *divisibile* per 3), ma è compreso tra due suoi multipli successivi (3 x 8 = 24 e 3.x 9 = 27). Se assumiamo 8 come risultato per difetto della divisione, compare il resto (1 perché 25 = 3 x 8 + 1).
Esaminiamo ora la divisione 32 : 10, anzitutto rappresentandola in modo analogo alla precedente. In questo disegno i gruppi di 10 sono sulle righe della tabella , 3 righe sono complete mentre l'ultima comprende solo 2 elementi:



Si conclude che 10 x 3 < 32 < 10 x 4 , quindi 3 è il risultato per difetto della divisione e poiché si può scrivere 32 = 10 x 3 + 2, il resto è 2.

Suddivisione del resto

Entrambe le divisioni, se si vuole aderire ai problemi che esse traducono (*Longo, 2010*), conducono a chiedersi come esprimere con il linguaggio matematico la suddivisione del resto. La divisione del resto in parti uguali può essere indicata con il simbolo di frazione (1/3 nel primo caso e 2/10 nel secondo caso, in riferimento al resto di ciascuna divisione) oppure mediante una successiva divisione (1 : 3 nel primo caso e 2 : 10 nel secondo caso) che però non si sa ancora eseguire. Le due frazioni indicano un progetto (ci suggeriscono per esempio di operare nel contesto di ciascun problema e di interpretare la frazione come un operatore su una opportuna grandezza), mentre le due divisioni ci rimandano a utilizzare il sistema di scrittura decimale posizionale, nel quale è definito l'algoritmo della divisione, per proseguire il calcolo anche in presenza di decimali.

Numeri decimali

Esaminiamo per primo il caso della divisione del resto in 10 parti uguali. Avendo come sfondo immagini collegate a suddivisioni reali, utilizziamo, per ampliarla, la rappresentazione decimale posizionale:

È noto il modello che si costruisce. Si suddivide l'unità U iniziale in 10 parti uguali, creando una nuova unità di misura U' = 1/10 U oppure, in forma equivalente: U = 10 U'

Il passaggio si può ripetere successivamente, suddividendo U' in 10 parti uguali:
U''= 1/10 U' = 1/100 U
(Stiamo usando il segno di frazione per indicare una suddivisione in parti uguali).
Questo comporta: U = 100 U''; U' = 10 U'' .

Immagine zoomata

Il procedimento si può ripetere quante volte si vuole. Ogni volta la nuova unità è 1/10 della precedente. L'ampliamento della scrittura posizionale introduce la virgola nella scrittura del numero.
Lasciamo per ora in sospeso i due casi di divisione e facciamo qualche esempio con altri numeri. Scrivere per esempio 2,3 significa «2 unità + 3 decimi» (che senza tenere conto della rappresentazione dei decimali, si potrebbe scrivere 2+3/10)
Dopo la virgola (analogamente alle cifre che si usano per la rappresentazione decimale posizionale dei naturali) in ogni posizione si usa una cifre da 0 a 9 e non un numero composto da più cifre.
Osserviamo che 1,10 coincide con 1,1 perché l'ultimo zero non è significativo per la rappresentazione della quantità, al contrario di quanto avviene per i numeri interi.
Il numero 2,3 (2 unità e 3 decimi) si può scrivere anche 2,30 cioè «2 unità + 3 decimi + 0 centesimi», in questo caso, dopo la virgola si è scritto 3 in prima posizione e 0 in seconda posizione e il numero si legge «2 unità e 30 centesimi». E quindi lo zero in ultima posizione cambia la lettura.
Nella rappresentazione dei decimali, per comodità si fa terminare il numero all'ultima cifra diversa da zero, ma potremmo *vedere* il numero decimale con tutta la sua infinita coda di zeri. I numeri decimali che abbiamo introdotto fin qui sono quelli che da un certo punto hanno tutti zeri (infiniti zeri), ma ce ne sono altri per cui questo non succede, visto che il procedimento illustrato sopra si può ripetere quante volte si vuole.
La rappresentazione dei decimali sulla retta numerica richiede solo di precisare il riferimento alle unità di misura, anche quando sia solo da pensare, perché la nuova unità U' può essere implicita, non disegnata:

---0------0,5------1------1,5------2----------------------(eccetera)

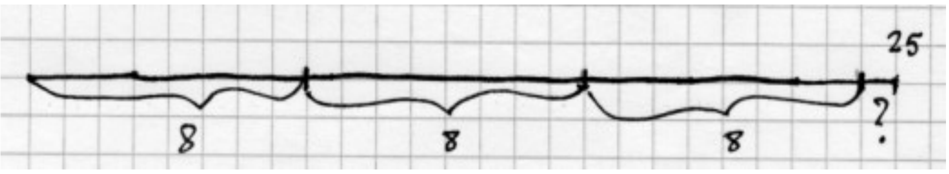
Confrontare due decimali

Richiamiamo il processo del confronto di due decimali su un esempio, considerando i due decimali 2,32 e 2,5. Occorre riportarci al significato del confronto tra numeri naturali e tentare di estenderlo ai decimali. La «parte intera» dei due numeri (quella che precede la virgola) è la stessa (2) quindi i due numeri sono compresi tra 2 e 3; non si possono confrontare tra loro solo le parti decimali così come sono scritte, bisogna che contengano esplicitamente lo stesso numero di decimali. Per ottenerlo, basta cambiare opportunamente la scrittura:
2,32 si può scrivere 2 + 32/100; adattiamo a questo il secondo numero: 2,5 = 2,50 si può scrivere 2+50/100; ora vediamo bene che 50/100 è maggiore di 32/100 e perciò 2,32 < 2,5 (per confrontare due frazioni con lo stesso denominatore basta confrontare i numeratori).
Nella rappresentazione dei numeri sulla retta numerica 2,5 è a destra di 2,32. Il confronto si può dedurre anche da una rappresentazione grafica accurata.

Ora è più chiaro perché non si possono confrontare direttamente tra loro le parti decimali come se fossero due numeri interi: nel caso preso in esame si avrebbe un risultato errato.
Ricordiamo che dopo l'introduzione dei numeri con segno, avremo anche i numeri decimali negativi.

Ritorniamo alla suddivisione del resto

Torniamo prima alla seconda divisione, il resto (2) va diviso in 10 parti uguali e possiamo indicare il risultato come una frazione (2/10) o come numero decimale 0,2 (che vengono identificati). Il risultato della divisione si scrive 3+2/10 = 3+0,2 = 3,2.
Passiamo poi alla prima divisione e osserviamo questa sua rappresentazione grafica:



Quanto avanza? Nell'immagine che, rispetto a quanto visto in (*Longo, 2010*), riflette una situazione decontestualizzata, resta *un quadretto* da dividere in 3 parti uguali.
Abbiamo già cercato i due multipli successivi di 3 tra cui è compreso il numero 25:
3 x 8 = 24; 3 x 9 = 27 e quindi: 24 < 25 < 27 e anche 3 x 8 < 25 < 3 x 9.
Se provvisoriamente scriviamo 25 : 3 = 8 + 1/3 possiamo pensare l'aggiunta di 1/3 dell'unità (fissata, secondo quanto esposto in (*Longo 2005*) in modo unico per tutte le frazioni) come un progetto di lavoro: la suddivisione del resto in 3 parti uguali. Non abbiamo immediatamente l'espressione del resto come decimale (che era evidente quando il resto era espresso con una frazione decimale), ma possiamo chiederci se è possibile ottenerla anche in questo caso. Per rispondere, abbiamo bisogno di utilizzare la nozione di equivalenza di frazioni.

Frazioni equivalenti

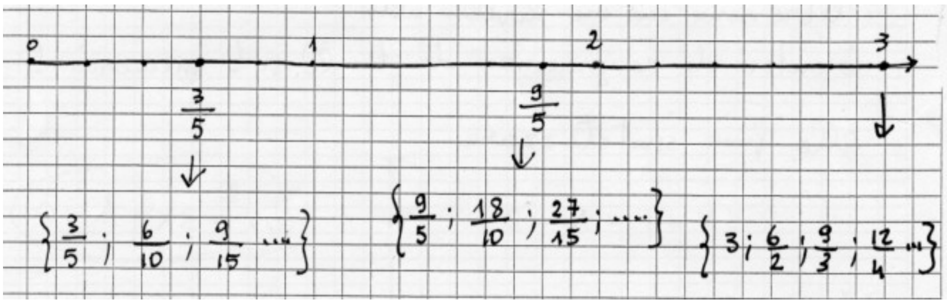
Il primo approccio intuitivo (*Longo, 2005*) può essere fatto sulle frazioni considerate come operatori su una stessa grandezza A. Due frazioni vengono dette «equivalenti» se assumono lo steso «valore», cioè generano in due modi diversi la stessa grandezza B.
Si fa vedere attraverso numerosi esempi che, a partire da una frazione data, si ottengono frazioni ad essa equivalenti moltiplicando numeratore e denominatore per uno stesso numero naturale. Alcuni testi di scuola secondaria di primo grado partono da una definizione indipendente dai disegni e dalla considerazione intuitiva sul «valore», chiamando equivalenti due frazioni a/b e c/d se (e solo se) ad = cb. Questa definizione acquista significato se ci si è prima imbattuti in un approccio intuitivo, di cui risulta l'espressione formalizzata, utilissima per la verifica.
Scriviamo alcune classi di frazioni equivalenti, già poste in modo che i termini del numeratore e denominatore siano crescenti:
{ 1/2; 2/4; 3/6; 4/8; ....}
{ 2/3; 4/6; 6/9; 8/12; .....}
{7/4; 14/ 8; 21/12; 28/16;.....}
{9/5; 18/10; 27/15; 36/20;....}
{10; 20/2; 30/3; ......}
{15; 30/2; 45/3;.....}

Ci chiediamo se la nostra equivalenza intuitiva individui una relazione di equivalenza secondo la definizione matematica: relazione riflessiva, simmetrica e transitiva. Per noi le frazioni di ciascuna classe sono tutte equivalenti tra loro perché individuano una stessa grandezza B, e quindi possono essere generate da una qualsiasi frazione della classe. Precisiamolo attraverso esempi.
Nella prima classe troviamo 1/2 e 4/8; per passare da 1/2 a 4/8 bisogna moltiplicare numeratore e denominatore per 4 (come detto all'inizio), ma per passare da 4/8 a 1/2bisogna dividere numeratore e denominatore per 4, semplicemente perché la divisione è il cammino inverso della moltiplicazione.
Nella seconda classe troviamo la frazione 8/12 con 8 = 4 x 2 e 12 = 4 x 3; quindi ragionando come sopra osserviamo che: 8/12 = (4 x 2)/(4 x 3) = 2/3 (ho usato il segno « = » anche per l'equivalenza).
Si arriva in questo modo alla ben nota regola per la *semplificazione* delle frazioni: *semplificare* una frazione significa sostituirla con una frazione equivalente con i termini minori di quelli della frazione data inizialmente, «eliminando» (tutti o in parte) i fattori comuni al numeratore e al denominatore. Il termine *eliminare* ha qui un significato analogico, non avviene per una cancellazione meccanica, ma per l'uso dell'equivalenza.
Si lascia al lettore la verifica completa delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.

Numero razionale

Una (intera) classe di frazioni equivalenti costituisce (per definizione) un «numero razionale», che può essere rappresentato da un qualsiasi elemento della sua classe: 7/4 e 28/16 sono due diversi *rappresentanti* dello stesso numero razionale e così ogni altra frazione della loro classe. È comodo assumere come rappresentante la frazione della classe avente i termini più piccoli, che nelle classi scritte precedentemente è la prima frazione di ogni riga (ridotta ai minimi termini).

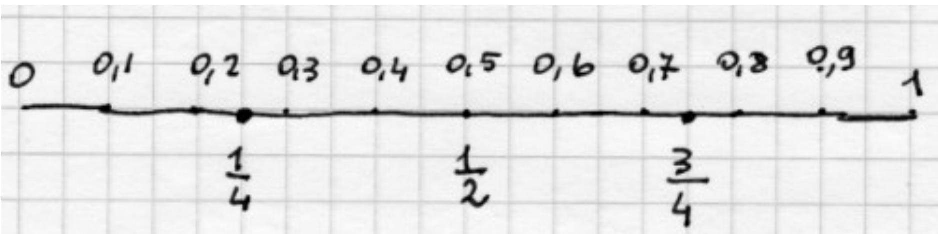
Esistono significati notevoli da approfondire dopo la scuola primaria, per esempio in un insieme di triangoli simili, le frazioni di una classe indicano tutte lo stesso rapporto.
Il passaggio fatto è molto comune in matematica quando si incontra una relazione di equivalenza. Se pensiamo che tutte le frazioni siano riferite a una stessa unità (quindi le trattiamo non come operatori ma come numeri), possiamo passare a una rappresentazione grafica delle frazioni delle classi indicate precedentemente:



Conclusione: ad alcuni punti della retta corrisponde un numero razionale (cioè tutte le frazioni di una classe di equivalenza, considerate come unico blocco), mentre a ogni numero razionale (classe identificata come unico elemento) corrisponde un solo punto e come già sapevamo, a ogni frazione corrisponde un solo punto. La corrispondenza così costruita tra i punti della retta e le frazioni non è biunivoca (si chiama uno-molti), ma identificando in un solo numero una classe di infinite frazioni equivalenti, la corrispondenza «punto-numero razionale» torna ad essere biunivoca, come lo era tra punti e numeri naturali: a ogni punto corrisponde un solo numero razionale, a ogni numero razionale corrisponde un solo punto della retta. Gli insiemi di numeri e gli insiemi di punti si rassomigliano sempre di più! Arriveranno mai a identificarsi? Lasciamo aperta la domanda.
Facciamo notare che le operazioni che si definiscono sui razionali dovranno conservare le proprietà delle operazioni tra numeri naturali, perché i numeri naturali sono un sottoinsieme (parte) dei numeri razionali.
Per esempio, la somma 15 + 7 si può considerare come un'operazione tra numeri naturali oppure un'operazione tra due numeri razionali, ma occorre che nei due casi il risultato coincida. Inoltre non sappiamo se abbiamo esaurito i punti della retta (per ora la retta è un oggetto intuitivo *in fieri*) o se rimangono punti senza corrispondente; in realtà nell'ottica intuitiva in cui ci siamo posti, stiamo generando contemporaneamente punti e numeri e non siamo per ora arrivati a completare i punti della retta e i numeri reali.

Numeri decimali e frazioni

Rappresentiamo ora frazioni e decimali sulla stessa semiretta (detta numerica), su cui abbiamo già rappresentato i numeri naturali N (interi positivi e zero), consideriamo per semplicità solo il segmento chiuso [01] e i numeri con una sola cifra decimale:



Notiamo immediatamente che alcuni punti corrispondono sia ad un decimale che a una frazione: per esempio 0,5 coincide con 1/2 oppure 0,1 coincide con 1/10. In entrambi i casi si tratta di *due diverse rappresentazioni dello stesso numero* e rileviamo di avere individuato almeno la *rappresentazione* decimale delle frazioni 1/2 (1/2 = 0,5) e 1/10(1/10 = 0,1). È un fatto che non ci sorprende; sappiamo già che i numeri naturali hanno molte diverse rappresentazioni: quella nostra decimale posizionale, quella dei romani, dei cinesi, eccetera. Capiterà altre volte.

Ma ampliando il disegno, si nota che, per esempio, la frazione 1/3 non corrisponde ad alcun decimale con una cifra! Dipende dal disegno o è un fatto certamente vero? Se nel disegno potessimo vedere anche i numeri con due cifre, la troveremmo? O con tre? In altri termini, si può dare una rappresentazione decimale (finita) di qualunque frazione?

Torniamo all'equivalenza di frazioni e sintetizziamo quanto detto:

- ogni frazione individua una classe di frazioni equivalenti;
- ciascuna classe si chiama «numero razionale»;
- in ciascuna classe esiste una frazione ridotta ai minimi termini.

I numeri decimali corrispondono a frazioni decimali e vale l'identificazione, per esempio 15,37 = 15 + 37/100 = 15 + 3/10 + 7/100.

Ci poniamo questa domanda: quali sono le classi di frazioni equivalenti che contengono una frazione decimale, cioè quali sono i numeri razionali che si possono rappresentare con un decimale (finito). Per esempio: 7/20 = 7/(4 x 5) = (7 x 5)/(4 x 25) = 35/100= 3,5.

I passaggi sono stati: dalla frazione 7/20 alla frazione equivalente 35/100, da questa frazione alla sua rappresentazione decimale, che consideriamo come rappresentazione di tutte le frazioni della classe e quindi del numero razionale da esse definito.

Si può procedere in questo modo se il denominatore contiene solo potenze di 2 o di 5.

Un esempio diverso: 7/13. Non si riesce a trasformare il numero 13 in una delle potenze di 10 perché queste non ci sono tra i suoi multipli:

13 x 1=13   13 x 2= 26   13 x 3 = 39   13 x 4 = 52   13 x 5 = 65   13 x 6 = 78
13 x 7 = 91   13 x 8 = 104   13 x 9 =117   13 x 10 = 130, eccetera.

Siccome la frazione indica la divisione tra il suo numeratore e il suo denominatore, tornando in base 10, si può eseguire la consueta divisione (attenzione, legata esclusivamente alla base 10) prolungandola dagli interi ai decimali: 7 : 13 = 0,5308 (con resto).

In questo caso abbiamo ottenuto solo una approssimazione mediante decimali, ma non siamo ancora in grado di stabilire se la parte decimale è limitata o illimitata. Manca in questo articolo un approfondimento della differenza tra frazione-operatore e frazione-numero, e un cenno ad altri significati della frazione, temi che rimandiamo a precisazioni successive.

Anna Paola Longo
(*Dipartimento di Matematica del Politecnico di Torino*)

Indicazioni Bibliografiche

Longo P., 2002, *I perché del numero zero. L'astrazione nella formazione matematica degli insegnanti*, in *Emmeciquadro n° 14-2002*, pp. 66–70.

Longo P., 2005, *L'insegnamento delle frazioni,* in Roletto E., *La scuola dell'apprendimento (didattiche disciplinari, modelli e applicazioni operative*), Erickson, Trento, pp.235-261.

Longo P., 2010, *Divisione nella scuola primaria: significato e calcolo,* in *Emmeciquadro n° 40-2010*, pp.58-66.

Longo P., 2011, *Le frazioni nella struttura moltiplicativa, nodi concettuali e ostacoli,* in *Il curriculum di matematica e fisica nel III millennio: infanzia, primaria, secondaria di primo e secondo grado*, a cura di O. Robutti e M. Mosca, Atti 5° convegno Nazionale Di.Fi.Ma.

EMMECI quadro
Scienza Educazione E Didattica

DIRETTORE RESPONSABILE Mario Gargantini
www.emmeciquadro.eu

Aut. Trib. Milano n. 226 del 24.3.2000
ISSN 2240-0389
Emmeciquadro (online)