CIFRE SEGNI OPERAZIONI (2)

percorsi nell'aritmetica alla secondaria di primo grado

*di Andrea Gorini**

Nella prima parte di questo contributo pubblicata sul numero 39 (agosto 2010) sono state presentate con dovizia di particolari alcune osservazioni relative al lavoro che può essere sviluppato in classe sull'insieme dei numeri naturali. Questa seconda parte è dedicata agli ampliamenti numerici che gli alunni incontrano nella scuola secondaria di primo grado. L'autore suggerisce esempi, motivandone lo scopo e l'utilità.

Il passaggio dai numeri naturali ai numeri razionali è il primo ampliamento dell'insieme numerico in cui i ragazzi si imbattono nella scuola secondaria di primo grado, che accolgono in modo generalmente naturale, poiché è esperienza comune dover trattare con quantità inferiori a un intero. Molte delle difficoltà incontrate nell'introdursi in questo ambito sono legate alla scrittura, o meglio alla molteplicità di scritture, dei nuovi oggetti, che vengono accolte in modo meno naturale.

*Docente di Matematica e Scienze presso la Scuola secondaria di primo grado "San Girolamo Emiliani" di Corbetta (Milano).

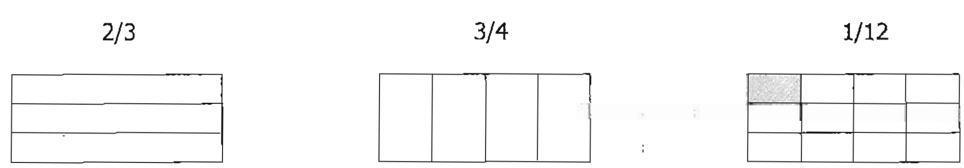
Numeri e parti

Non conosco l'origine della scrittura delle frazioni, non mi sorprenderebbe scoprire che l'usanza di scrivere il numeratore sopra al denominatore sia riconducibile a espressioni del tipo «uno su sei» o «due su cinque». Qualunque sia l'origine resta il fatto che anche in questo caso la forma grafica, addirittura la percezione visiva, aiuta l'uso. Nessuno vieta infatti di indicare la frazione «due quinti» come si fa in un corso superiore di Algebra [2, 5], dove la scrittura mette in luce, per l'esperto, che si ha a che fare con infinite coppie ordinate di numeri tutte equivalenti tra loro rispetto a una ben determinata relazione di equivalenza, tuttavia la scrittura ordinaria delle frazioni ricorda che i numeri in essa hanno uno *status* differente. Come dimostra anche il linguaggio specifico nell'assegnare i nomi agli elementi della frazione: nell'esempio precedente «due» linguisticamente resta inalterato e mantiene il significato ordinario di contatore, il numeratore, «cinque» diventa «quinti», cambia l'espressione linguistica, perché cambia il significa-

to; esso infatti designa ciò di cui si sta parlando, denomina, denominatore appunto, gli oggetti che vengono contati, non più delle unità, ma come è noto delle parti, che fungono da nuove «unità di conteggio».
Far osservare queste particolarità può aiutare i ragazzi a evitare errori grossolani nelle operazioni con le frazioni, in particolare per quanto riguarda la somma. Può essere utile affrontare prima delle operazioni il confronto, sollecitando con alcuni esercizi la necessità di trovare una strategia per stabilire l'ordinamento di frazioni con il denominatore diverso; in questo modo è possibile mettere a fuoco la difficoltà concettuale della somma delle frazioni, distaccandola dall'acquisizione della regola, che a questo punto diventa occasione di recupero o di rinforzo del concetto stesso di frazione.
In questo senso è importante dedicare alla rappresentazione delle frazioni uno spazio adeguato: ho osservato che privilegiare la rappresentazione mediante rettangoli è più funzionale perché restituisce meglio la struttura moltiplicativa su cui le frazioni sono formate.

Il confronto delle frazioni

Confrontare due frazioni con lo stesso denominatore è semplice perché ci si riconduce al confronto dei numeratori e quindi a una situazione già nota; confrontare due frazioni con lo stesso numeratore è ancora possibile riflettendo sul significato del denominatore, anche se non è immediato quando il numeratore è diverso da uno.
Stabilire la frazione maggiore tra 2/3 e 3/4 richiede un salto concettuale e operativo: occorre trovare il modo di confrontare due parti che non mostrano con evidenza come siano confrontabili. Passando attraverso la rappresentazione emerge il nuovo concetto, il denominatore comune, ovvero la «sottoparte che misura le parti» come direbbe Euclide.



Nella figura sono mostrate le rappresentazioni delle frazioni da confrontare e della frazione unitaria con il denominatore adatto a risolvere il problema.
In questo modo si mostra l'importanza del fatto che i nuovi numeri hanno diverse, infinite scritture, poiché proprio in ciò è nascosta la possibilità di trovare volta per volta la scrittura più opportuna. È importante osservare che nella addizione di frazioni con denominatore diverso si opera trasformando per equivalenza le frazioni e si ottengono frazioni che hanno denominatori maggiori di quelli degli addendi. Per operare la moltiplicazione conviene invece, operando la semplificazione in croce, passare a denomi-

natori minori: anche questa è una difficoltà da aver presente. La moltiplicazione inoltre richiede attenzione particolare perché con i numeri razionali il prodotto non è sempre maggiore dei fattori, diversamente da quanto accade per i numeri naturali; motivo per cui si genera la convinzione errata, che moltiplicare significa sempre aumentare, rafforzata dal fatto che in altri contesti la moltiplicazione è legata ai multipli, come per i segmenti o gli angoli. L'introduzione della divisione infine è un passaggio puramente formale, che può essere aiutato da osservazioni su operazioni quali

$$10 : 2 \qquad e \qquad 10 \times 1/2$$

che producono lo stesso risultato, e può essere ancora l'occasione di tornare sul concetto di frazione oppure di introdurre la frazione come operatore se ancora non lo si è fatto.

Le frazioni apparenti

Le difficoltà legate all'ampliamento vero e proprio sono legate però alle frazioni apparenti, con le quali i «vecchi» numeri naturali assumono una nuova veste. Segno di ciò sono gli errori nelle operazioni che contemplano una frazione e un naturale, alle quali occorre dedicare una particolare attenzione per aiutare il linguaggio e la manipolazione delle scritture a evolvere tenendo dietro al nuovo strumento concettuale.

Le frazioni improprie

Il passaggio infine alle frazioni improprie richiede un ulteriore salto: con esse infatti non si può più affermare che si sta trattando delle parti di un intero, ma di nuove quantità individuate relativamente a un intero preso come riferimento, in questo senso è opportuno proporre anche esercizi che richiedono di scrivere una frazione impropria come somma di un naturale e una frazione propria. Questa è l'occasione per aprire un nuovo orizzonte, la misura, che non a caso è definita come un rapporto tra le grandezze di una stessa classe. E il rapporto è un'altra delle sfaccettature della frazione.

La scrittura decimale

Con il passaggio ai numeri razionali si mette alla prova il sistema di numerazione posizionale: un'altra scrittura con cui i ragazzi devono confrontarsi infatti è quella decimale e ancora una volta la nuova trasformazione non è accolta senza fatica. Il sistema di numerazione in base dieci regge al nuovo passaggio, ma fino a un certo punto, poiché compaiono i numeri decimali periodici, infiniti allineamenti di cifre che si ripetono con regolarità. Si aprono così ulteriori ambiti, il significato e la necessità di operare appros-

simazioni, ma anche la riflessione che le diverse possibilità assicurate dalle scritture dei numeri razionali, la frazione, il numero decimale e se vogliamo anche le percentuali, permettono di scegliere volta per volta, situazione per situazione, la scrittura più opportuna.
Concludiamo il breve *excursus* con un altro intervento dell'infinito nell'insieme dei razionali: tra due interi successivi come 0 e 1 sono contenuti infiniti numeri razionali. Questo offre la possibilità di distinguere tra due concetti spesso confusi anche da studenti universitari, la limitatezza e la finitezza, che non sono affatto coincidenti. L'insieme dei numeri della forma $1/n$, con $n \geq 2$, è costituito da infiniti elementi tutti racchiusi tra 0 e 1.

Le operazioni con i numeri razionali

L'insieme dei numeri razionali, con le sue diverse forme di «travestimento», appare articolato se non addirittura complicato. È opportuno procedere con cautela nell'introduzione delle diverse scritture e delle regole di manipolazione su di esse; occorre non forzare l'aspetto formale per evitare di separare le nuove forme dai contenuti numerici che le hanno generate, dando modo, per consolidare tale legame, di ripercorre al contrario attraverso esercizi e attività la strada della formalizzazione.
La ricchezza della struttura permette inoltre di lavorare su diversi importanti aspetti dell'insegnamento della Matematica, anche partendo da alcuni errori tipici che tutti gli anni si incontrano nel lavoro in classe. Vediamo alcuni esempi che possono essere spunto di ulteriori riflessioni.

L'equivalenza delle frazioni

Il primo, di carattere linguistico, riguarda una definizione: spesso si confonde la definizione di equivalenza di frazioni con la procedura per verificare se due frazioni sono equivalenti, sostenendo che deve esistere un numero opportuno per cui moltiplicare numeratore e denominatore di una frazione per ottenere numeratore e denominatore dell'altra. Secondo questa procedura 6/8 e 9/12 non sarebbero equivalenti. Per uscire da questa incongruenza occorre tornare al significato di equivalenza di frazioni, cercando una procedura diversa che renda conto anche di questo caso: emerge meglio così l'importanza della frazione ridotta ai minimi termini, generatrice di tutte le frazioni a essa equivalenti, secondo una struttura analoga a quella che lega il minimo comune multiplo di due numeri a tutti i multipli comuni.

La somma di frazioni

Il secondo esempio riguarda la somma, cui già abbiamo fatto riferimento: la tentazione di sommare le frazioni sommando numeratori con numeratori e denominatori con denominatori è troppo forte perché anche ragazzi intelligenti ma un po' fannulloni non ci caschino. Si tratta di un errore dovuto al mancato collegamento tra il significato della scrittura e la sua manipolazione. Può essere utile per tentare un recupero, oltre a chiedere di rappresentare graficamente le frazioni e la somma ottenuta, anche confrontare tale somma con gli addendi. Date infatti due frazioni qualunque con

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$$

vale la relazione

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

che si può usare per convincere dell'errata procedura e scalzare la convinzione sbagliata riconducendosi a una convinzione corretta più radicata.

Altri ampliamenti

Nella scuola secondaria di primo grado si affrontano ulteriori ampliamenti degli insiemi numerici; si introducono i numeri irrazionali, che si incontrano nell'estrazione di radice e nella determinazione delle misure del cerchio, si affronta l'insieme dei numeri relativi, in genere iniziando dagli interi relativi. Per questi nuovi ambiti accenniamo solo alcune osservazioni: nella scuola secondaria di secondo grado infatti vengono ripresi e approfonditi.

I numeri irrazionali

Il passaggio al numero reale non viene generalmente compreso dai ragazzi e in realtà ciò che esso sottende, la continuità, è un salto concettuale che deve aver tempo di mostrare la sua necessità e di maturare lentamente. Segno di questa inadeguatezza alla situazione dei ragazzi è il fatto che fatichino ad accettare, se mai lo fanno, che il numero periodico $0,\bar{9}$ coincide con 1. Ancora una volta viene in aiuto la scrittura: generalmente infatti si introducono i numeri irrazionali partendo da numeri decimali illimitati periodici togliendo quest'ultima caratteristica e questo può essere sufficiente per rendere l'idea, ma per l'utilizzo si ricorre all'approssimazione. L'uso nel calcolo dei simboli $\sqrt{2}$ e π va nella direzione del calcolo algebrico e può essere a tal fine utilizzato, senza trascurare l'esigenza radicata da parte di molti ragazzi di voler concludere una serie di operazioni con un numero, ovvero con una scrittura che essi riconoscono come numero.

I numeri relativi

L'introduzione dei numeri relativi mostra invece un esempio di convenzione che sorprende per la sua efficacia: se ci riferiamo alla rappresentazione dei relativi sulla retta, il segno del numero relativo è indice della sua posizione rispetto all'origine, né più né meno che un trucco per evitare di usare espressioni del tipo «avanti» o «indietro».
Eppure non sfugge che i simboli utilizzati, «+» e «–», senza che inizialmente ciò sia origine di incomprensioni, siano gli stessi simboli usati per le operazioni aritmetiche.
Le difficoltà sorgono nel momento in cui si inizia a operare con questi «nuovi» numeri, sempre con la speranza di riuscire a estendere le operazioni e le proprietà già viste per gli insiemi numerici già incontrati: ciò che i ragazzi faticano a tenere sottocontrollo è il diverso significato che lo stesso segno grafico «-» assume nello stesso contesto; eppure è proprio l'efficacia del segno, che riesce a reggere senza generare ambiguità il peso del doppio significato, a renderlo interessante, e nello stesso tempo richiede attenzione perché sia compresa fino in fondo la sua doppia valenza.
L'indicazione che si può utilizzare per introdurre i numeri relativi suggerisce una strada per la corretta comprensione: se «+» o «–» indicano la posizione (che si raggiunge) spostandosi dall'origine nel senso crescente o decrescente, allo stesso modo operare una somma algebrica significa muoversi in senso crescente o decrescente di un tratto che non è più necessariamente per forza positivo, ma reca in se stesso in forza del suo segno un verso; in questo modo si giustifica la regola dei segni, poiché cambiare due volte il senso di marcia significa non cambiare affatto.
Come si può osservare, sotto lo stesso simbolo ci sono significati diversi che, in questo caso, si possono ricondurre a uno stesso concetto, pur di esplicitarlo correttamente. Il rovescio della medaglia è costituito dalla difficoltà di comprendere e formalizzare il valore assoluto e il profondo cambiamento cui l'operazione di somma, la più primitiva e radicata, va incontro, poiché non descrive più solo situazioni di accrescimento e accumulo, ma anche nuove situazioni nelle quali si procede anche all'indietro. ❖

INDICAZIONI BIBLIOGRAFICHE

[1] H. Freudenthal, *Ripensando l'educazione matematica*, La Scuola, Brescia 1994.
[2] G. Buffa, *Tra numeri e dita*, Zanichelli, Bologna 1986.
[3] J. Conway e R. Guy, *Il libro dei numeri*, Hoepli, Milano 1999.
[4] M. Dedò, *Matematiche elementari*, Liguori, Napoli 1979.
[5] G. Ifrah, *Storia universale dei numeri*, A. Mondatori, Milano 1983.
[6] C.F. Manara, *Atti del convegno "Scienza e creatività"*, Ancona 1993.
[7] S. Dehaene, *Il pallino della matematica*, Mondatori, Milano 2000.