CHE COS'È LA MATEMATICA

OVVERO PERCHÉ LA MATEMATICA PUÒ PIACERE

*di Marco Bramanti**

La matematica è una scienza? È una filosofia? O cos'altro? Quali sono le caratteristiche del sapere matematico, sia nella forma «statica» di insieme di conoscenze strutturate come sistema ipotetico deduttivo, sia nella forma «dinamica» di ricerca di nuovi risultati? L'autore cerca di cogliere alcuni elementi per rispondere anche a un'altra questione, che non pochi si pongono: perché ad alcuni la matematica piace?

*Associato di Analisi Matematica presso il Politecnico di Milano.

Desidero riflettere sul tema della matematica come conoscenza, su come e perché la matematica possa essere interessante in se stessa in quanto oggetto di studio e di ricerca, a prescindere dalla sua utilità o dalle sue applicazioni. Cercando di individuare alcuni motivi «oggettivi» per cui la matematica possa essere interessante, mi sono accorto che la riflessione sconfinava continuamente su considerazioni soggettive e su criteri di gusto personale.
Da una parte questo può essere comune a qualsiasi disciplina: se si chiede a una persona che per mestiere studia un certo argomento perché lo fa, probabilmente risponderà «perché mi piace». D'altro canto credo che i matematici siano più sensibili di altre categorie di persone al criterio estetico nel loro lavoro. Perciò ho rinunciato, almeno in parte, a enunciare motivi oggettivi per cui la matematica è interessante, individuando piuttosto alcune caratteristiche della matematica per cui «a me piace». Al tempo stesso, credo che questi miei criteri di giudizio siano abbastanza condivisi, di fatto, tra le persone che si occupano di matematica con gusto. Perciò, penso di poter proporre queste considerazioni non solo come testimonianza personale, né come tentativo di convincere qualcuno che la matematica deve piacergli; piuttosto, come resoconto di alcuni degli elementi di interesse e fascino per cui a molti la matematica piace.
Per iniziare la riflessione è opportuno sgombrare il campo da alcuni possibili equivoci.

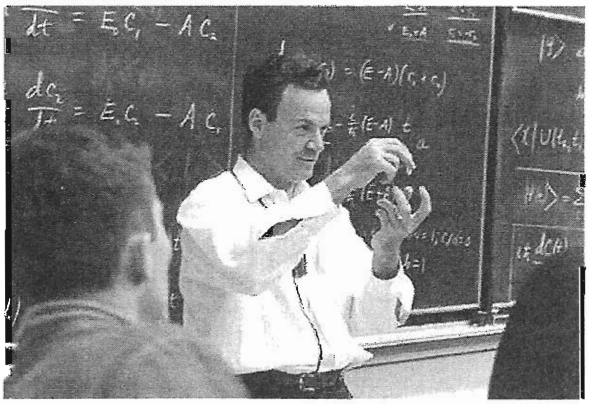
La matematica è una scienza?

Almeno in senso stretto bisogna rispondere di no. La scienza moderna nasce nel Seicento, la scienza matura è quella di

Galileo, e soprattutto quella di Newton; prima è solo un insieme di tentativi frammentari. La matematica invece è andata emergendo e maturando, come sapere organizzato e strutturato in modo ipotetico-deduttivo (assiomi, definizioni, teoremi, eccetera) in quei trecento anni che vanno da Talete a Euclide, dal VI al III secolo a.C., lo stesso periodo in cui è fiorito il grande pensiero filosofico greco. Certamente quando vengono scritti gli *Elementi* di Euclide, intorno al 300 a.C., la matematica è già «matura». Se la matematica è già matura quasi 2 000 anni prima che lo sia la scienza, certamente è qualcosa di diverso dalla scienza.
A giudicare dalle sue origini, la matematica sembra quindi un'attività legata alla razionalità umana nel suo aspetto più profondo, ma non strettamente e necessariamente orientata all'indagine sul mondo fisico e sulle sue leggi. Allora la matematica non c'entra con la scienza? C'entra, almeno in due sensi.
Da quando la scienza è nata, la matematica ha avuto uno sviluppo impressionante, un'esplosione di ricerche e di progressi inimmaginabili prima; la scienza infatti ha fornito alla matematica problemi, stimoli, motivazioni, applicazioni e anche strumenti per la ricerca (per esempio i computer), senza con ciò esaurire tutti i problemi, tutte le motivazioni, tutti gli stimoli della ricerca matematica.
In secondo luogo, la scienza moderna nasce come scienza matematizzata: Newton ha dovuto inventare il calcolo infinitesimale per poter fare la sua meccanica; la sua opera fondamentale infatti si intitola *I princìpi matematici della filosofia naturale.* La scienza moderna «parla» col linguaggio matematico e senza di esso è semplicemente muta. Quello che la scienza dice è suggerito dalle indagini scientifiche, non matematiche, ma senza matematica non si potrebbe formulare nessuna legge fisica e nessuna teoria; si potrebbe al massimo fare il resoconto di osservazioni isolate.
Galileo si spinse ad affermare che la scienza parla il linguaggio matematico perché il libro della natura è scritto in linguaggio matematico. Anche Richard Feynman, premio Nobel per la fisica, scrive: «La cosa strana della fisica è che anche per formulare le leggi fondamentali abbiamo bisogno della matematica. [...] Più investighiamo, più leggi troviamo, più profondamente penetriamo la natura, più la malattia persiste: ognuna delle nostre leggi è un'affermazione puramente matematica. [...] Voi mi potreste dire: "Perché non dirla a parole invece che a simboli? La matematica è solo un linguaggio, e noi vogliamo poterlo tradurre". [...] Ma io non credo che sia possibile, perché la matematica non è semplicemente un'altra lingua. La matematica è un linguaggio più il ragionamento; un linguaggio più la logica, cioè uno

Isaac Newton (1642-1727)

Richard Feynman (1918-1988)



strumento per ragionare. In effetti è una grande raccolta dei risultati dell'attento ragionamento di varie persone. Per mezzo di essa è possibile collegare un'affermazione a un'altra.»[1]
In sintesi, la matematica ha reso possibile il nascere della scienza moderna e la scienza moderna, a sua volta, ha causato il «boom» della matematica; la matematica è legata e intrecciata alla scienza, ma ben distinta da essa.

La matematica è filosofia?

Certamente no. Anche se nella storia ci sono esempi eclatanti di grandi matematici che erano grandi filosofi (Talete, Cartesio, Leibniz, eccetera) direi che a nessuno viene la tentazione di affermare che la matematica sia filosofia. Per esempio, Cartesio nel 1637 scrive il suo *Discorso sul metodo,* e in appendice c'è la sua *Geometria*: l'invenzione della geometria analitica, svolta epocale nella storia della matematica, è pubblicata in appendice a un testo filosofico altrettanto fondamentale per la storia della filosofia! Ma le due cose sono solo giustapposte, in realtà non hanno molto in comune. Il metodo dimostrativo della matematica è lontanissimo dal metodo argomentativo della filosofia, e lo si riconosce dai frutti: un teorema dimostrato da Cartesio è riconosciuto vero anche oggi, da tutti i matematici, mentre nessuna tesi importante di un grande filosofo di ieri vede «tutti» d'accordo oggi: in filosofia ci sono sempre i *fan* e gli oppositori, finché c'è vita c'è dibattito.

Lo spirito di Euclide


Euclide
(IV-III sec. a.C.)

Che cos'è dunque la matematica? Consideriamo un esempio che in parte non fa che riporre questa domanda, in parte suggerisce già qualche spunto di risposta.
Euclide duemilatrecento anni fa scrive: «Teorema. *Esistono infiniti numeri primi.* Dimostrazione. *Supponiamo per assurdo che ce ne siano solo un numero finito, e pensiamo di elencarli tutti. Allora, a partire da questo elenco, con un certo procedimento* [...] *si costruisce un nuovo numero che si dimostra essere primo e che d'altra parte è più grande di tutti i numeri primi dell'elenco. Assurdo, perché allora vuol dire che l'elenco non era completo. Così il teorema è dimostrato.*»
In un'epoca in cui nessuna applicazione pratica dei numeri primi era conosciuta, perché a Euclide interessavano?[2]
In un'epoca in cui non esisteva alcuno strumento per eseguire calcoli con numeri «grandi» (computer, calcolatrici, regoli, eccetera), in cui la stessa scrittura dei numeri, che non si basava ancora sul sistema posizionale, era inadatta a fare somme e prodotti con carta e penna e la maggior parte delle persone non era in grado di fare cal-

coli precisi con numeri elevati, perché preoccuparsi di queste cose? Riflettiamo sulla profondità di questi pensieri di Euclide: chiedersi quanti sono i numeri primi; concepire l'infinità dei numeri primi. Pensare che la propria mente, che non saprebbe elencarne più di qualche centinaio, possa dimostrare rigorosamente che in realtà ce ne sono infiniti. Pensare che un ragionamento di pochi passaggi possa stabilire per sempre, e oltre ogni ragionevole dubbio, ciò che una vita intera non basterebbe a verificare empiricamente.
Se cogliamo il fascino di questa ricerca, iniziamo a capire che cos'è la matematica, qual è la molla che rende questo tipo di conoscenza affascinante per certe persone. Non per niente Einstein scrisse: «Se Euclide non è riuscito ad accendere il vostro entusiasmo giovanile, non siete nati per essere un pensatore scientifico». Prima ho affermato che la matematica non è una scienza, ma ciò non toglie che agli scienziati teorici, com'era Einstein, solitamente la matematica piace.

Il sapere matematico consiste di verità necessarie

Consideriamo la categoria del «necessario» contrapposta a quella del «contingente». Contingente è ciò che «c'è ma potrebbe non esserci»; necessario è ciò che «c'è perché non potrebbe non esserci».
Passando dal piano dell'essere a quello del conoscere, che qui interessa, l'affermazione «oggi c'è il sole» è una verità contingente (è vero, ma avrebbe potuto essere falso), mentre il teorema di Pitagora è una verità necessaria (è vero e non potrebbe essere altrimenti).
La matematica si occupa di verità necessarie. Questo certamente risponde a un'esigenza sempre sentita dalla ragione dell'uomo: nel mare delle realtà contingenti, individuare qualcosa che sia necessario, dei punti fermi.
Una verità necessaria è *a priori* rispetto a qualsiasi tipo di osservazione della realtà fisica. Questa è una profonda differenza tra sapere matematico e sapere scientifico. Si può anche dire che la matematica, cogliendo il perché dei nessi necessari tra le proprietà degli oggetti, delimita lo spazio del possibile, mentre l'osservazione scientifica cerca di cogliere qual è la scelta contingente che la natura fa tra gli infiniti mondi possibili. Sono due atteggiamenti complementari, non contrapposti.
Essendo le leggi fisiche formulate con linguaggio matematico, la matematica individua le «leggi delle leggi di natura», dettando proprietà che necessariamente devono essere possedute dai concetti scientifici introdotti.
Una verità necessaria è «stabile», non diventerà falsa domani, e da essa possiamo partire per nuove indagini. Infatti la matematica è un sapere che avanza nel tempo in modo irreversibile; quel che studiamo in matematica non sarà mai del tutto superato e questo ci fa sentire ripagati dello sforzo di apprendere.

[1]R. Feynman, *La legge fisica*, Boringhieri, Torino 1971, pp. 43-44.
[2]Oggi, grazie ai numeri primi, possiamo fare *shopping online* pagando con la carta di credito: il numero di carta di credito è trasmesso in codice cifrato, per sicurezza, e tutti i codici si basano sulle proprietà dei numeri primi.

La dimostrazione come spiegazione di un perché

La necessità di cui parliamo è necessità logica, e la logica procede per catene deduttive. Quindi la verità di un teorema è svelata dal «filo» della sua dimostrazione. La matematica è questo intreccio di fili, alcuni brevi altri lunghissimi, che la percorrono in ogni senso, gettando nessi tra oggetti vicini e lontani. Le relazioni esistenti tra oggetti ci spiegano il perché di certe verità. Gottlob Frege, matematico e filosofo di fine Ottocento, scrive nel 1874: «È certo che formule numeriche come $5 + 7 = 12$ e leggi come quella associativa per l'addizione hanno così innumerevoli conferme in infinite applicazioni giornaliere che può sembrare quasi ridicolo levare qualche dubbio su di esse coll'esigerne una dimostrazione. Ma è nella natura stessa della matematica che dovunque sia possibile una dimostrazione la si ritenga preferibile a una semplice verifica induttiva. In realtà il processo dimostrativo non ha esclusivamente lo scopo di elevare al di sopra di qualsiasi dubbio la verità dei singoli teoremi, ma anche di farci comprendere la dipendenza di queste verità le une dalle altre. Una volta convinti dell'immobilità di una roccia per aver tentato invano di spostarla ci si può chiedere, inoltre, che cosa la sostenga con tanta saldezza.»[3] Il matematico non è uno scettico, che ha bisogno di dimostrare anche le cose più evidenti per poterci credere; piuttosto, è una persona che non si accontenta di «registrare» che certe cose stanno in un certo modo, ma vuole capirne il perché profondo. In particolare vuole svelare se e in che senso le cose stanno così «perché non potrebbe essere diversamente». Lo studio della matematica, o la ricerca matematica, sono percorse dal desiderio di «svelare la trama del disegno» cogliendo nessi tra le cose.

Gottlob Frege
(1848-1925)

Universalità e astrazione

Strettamente legato al carattere di necessità delle affermazioni matematiche, sta il carattere della universalità.

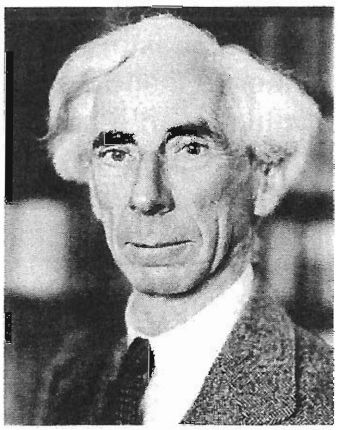
Il 90% dei teoremi matematici ha la struttura logica dell'implicazione universale, ossia: *Per ogni oggetto x del tal tipo, se vale questa proprietà, allora vale anche quest'altra.*

Per esempio, il Teorema di Pitagora dice che *In ogni triangolo, se un angolo è retto allora il quadrato dell'ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati dei cateti.*

Per questa struttura tipica diciamo che una teoria matematica è un sistema ipotetico-deduttivo. Un solo teorema, quindi, contiene in sé infinite affermazioni vere, che riguardano gli infiniti oggetti di un certo tipo, che già conosco e che potrei conoscere domani. Si parla di «tutti» gli oggetti che soddisfano certe ipotesi: questa è l'universalità.

L'universalità dei teoremi è resa possibile dall'astrazione. Una classe di infiniti oggetti (per esempio i triangoli rettangoli) non può essere individuata elencandone gli elementi (questo triangolo, e poi quest'altro, e poi

quest'altro ancora): non si finirebbe mai. È individuata, invece, specificandone le «proprietà caratteristiche», per esempio essere un poligono di tre lati e avere un angolo retto. Quando si dimostra il teorema di Pitagora, ogni affermazione fatta dovrà essere vera per qualsiasi triangolo rettangolo.
Bertrand Russell, ne *I princìpi della matematica*[4], scrive che il concetto più caratteristico della matematica è quello di variabile, e il concetto di variabile richiede per la sua definizione il concetto indefinibile di «qualsiasi». La parola qualsiasi quindi è cruciale in matematica.
Nella mentalità corrente, la parola «astratto» ha una connotazione negativa: negazione di ciò che è concreto, reale, vivo. Ma «astrarre» vuol dire cogliere ciò che c'è di comune in varie esperienze concrete; l'astrazione è quindi un modo di leggere la concretezza cercando qualcosa di unitario nel molteplice. Le proprietà vere per qualsiasi triangolo, che sono le uniche che si devono usare se si vuole dimostrare qualcosa che valga per tutti i triangoli, sono ottenute con un procedimento di astrazione, stabilendo cosa c'è di comune tra i triangoli. Perciò «triangolo» è un concetto astratto. La matematica, parlando per concetti astratti, riesce a fare infinite affermazioni con un numero finito di parole. Non è affascinante questo?
Si cita spesso la frase romantica di Goethe: «Grigia è la teoria, verde l'albero della vita». Io dico: grigia è la teoria, per chi non la capisce. Un bravo matematico parla degli oggetti più astratti come se li vedesse; e in effetti li vede, perché li capisce (etimologicamente «teoria» vuol dire «visione»).


Bertrand Russel (1872-1970)

[3]Da *I fondamenti dell'aritmetica*, in: C. Mangione (a cura di), *Frege: Logica e aritmetica*, Boringhieri, Torino 1977, p. 222.
[4]Cfr.: B. Russell, *I principi della matematica*, Tascabili economici Newton, Roma, 1989, cap. 8.

Primo punto di sintesi: la matematica «statica»

❑ La natura del sapere matematico è stabilire le relazioni necessarie, i nessi logici, tra le proprietà degli oggetti. Non basta un insieme di affermazioni vere ma slegate tra loro, si cerca un «disegno» che colleghi certe verità ad altre.
❑ Ciò che è logicamente necessario non è una proprietà ma il nesso, l'implicazione fra due proprietà. Perciò la matematica è un sapere ipotetico-deduttivo: *se ... allora*.
❑ Essendo logicamente necessarie, le verità matematiche sono *a priori* rispetto all'osservazione della realtà fisica, e stabili nel tempo. Apprendere un sapere di questo tipo è quindi un buon investimento.
❑ La forma tipica del teorema è: *Qualsiasi oggetto abbia questa proprietà, ha anche quest'altra*. L'universalità del teorema, espressa nella parola «qualsiasi», è resa possibile dalla natura «astratta» dei concetti e degli oggetti matematici. Dire che un oggetto è astratto vuol dire che non è definito nella sua individualità, ma è definito mediante le sue «proprietà caratteristiche». L'attitudine ad astrarre è legata al desiderio della nostra mente di cogliere che cosa c'è di più profondamente in comune tra molteplici oggetti di un certo tipo.

L'aspetto dinamico della matematica

Abbiamo sottolineato alcuni aspetti della matematica che si ritrovano già nella matematica «statica», ossia la matematica come sapere necessario, stabile, universale, astratto e la dimostrazione come ricerca di nessi e di spiegazione. Ci spostiamo ora su qualcosa che ha a che fare con la pratica matematica, ossia la ricerca, che in un certo senso è l'aspetto dinamico della matematica.
«Non è la conoscenza, ma l'atto di apprendere, non il possesso ma l'atto di arrivarci, che garantisce il più grande piacere. Quando io ho chiarificato ed esaurito un argomento, volto le spalle a questo, per entrare di nuovo nell'oscurità; l'uomo perennemente insoddisfatto è strano: se ha finito di costruire una struttura non è per abitarci in pace, ma per cominciarne un'altra. Immagino che il conquistatore del mondo si debba sentire così: dopo che un regno è stato conquistato a fatica, imbraccia le armi per conquistarne un altro.»[5]


Karl Friedrich Gauss (1777-1855)

Congetture, pregiudizi, feeling

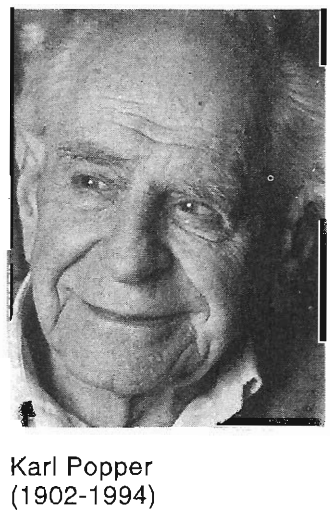
Supponiamo che io stia riflettendo su certi oggetti matematici, e mi venga l'idea che possa essere vero un certo teorema, della forma: *Per ogni oggetto* x *del tal tipo, se vale questa proprietà allora vale anche quest'altra.*
Si dice che sto facendo una «congettura».
Una congettura è un enunciato preciso, come quello di un teorema, che però non è ancora un teorema perché nessuno l'ha dimostrato. A rigore, quindi, non si sa ancora se sia vero o falso. Come faccio a decidere se è vero o falso?
Se voglio provare che è vero, dovrò dimostrare che preso un qualsiasi oggetto x del tal tipo, per il quale vale la tal proprietà, vale anche la tal altra proprietà. Devo fare una dimostrazione, usando argomenti validi per «qualsiasi x del tal tipo». Ma se non riesco a dimostrare il teorema, non posso certo concludere che è falso! Il teorema potrebbe essere vero, e io non abbastanza bravo da dimostrarlo. Ma supponiamo che invece io trovi un esempio specifico di un certo x che soddisfa l'ipotesi ma non la tesi del teorema; allora il teorema è falso: la sua pretesa di universalità crolla di fronte a un solo «contresempio». La regola crolla di fronte all'eccezione. Dunque se voglio dimostrare che la congettura è falsa, cercherò un contresempio, ma se non lo trovo non posso concludere che il teorema è vero.
Quindi, data la congettura, se voglio provare che è vera seguo una strada; se voglio provare che è falsa ne seguo un'altra; se seguo una delle due strade e non arrivo a nulla, non posso concludere nulla, e ho perso tempo: dovrò provare l'altra strada.

Per non perdere tempo, dovrei sapere in anticipo se la congettura è vera o falsa, ma è proprio quello che ancora non so. Però, in realtà, potrei avere un'idea per cui è «plausibile» che la congettura sia vera (o falsa), e allora seguirò, per cominciare, la strada che mi sembra più promettente. Ma questo è un «pregiudizio». Ed è proprio così: occorre avere dei pregiudizi.

Sembra paradossale, ma nella ricerca di verità necessarie e universali, la strada passa per il «mi sembra», per i pregiudizi, per il *feeling* che io ho riguardo un certo problema. D'altronde è chiaro che, in ogni campo, non esiste una procedura rigorosa da seguire per fare scoperte. Il «prodotto finito» dei matematici è rigoroso, ma il «processo di produzione» non lo è in quanto contiene tutti gli elementi non rigorosi della ricerca per tentativi: si congettura in base a intuizioni e analogie, cercando di generalizzare risultati già noti in casi più semplici, si tenta di indovinare che forma potrebbe avere il risultato vero ricercando simmetrie, schemi semplici ed eleganti, per quanto possibile; si fanno i calcoli mediante passaggi non rigorosi, o passaggi che valgono solo sotto ipotesi restrittive, pur di arrivare in fondo al calcolo in fretta e vedere cosa si trova o cosa si potrebbe trovare. Quel che si ottiene così non è un risultato, ma può essere un'idea su un possibile risultato, può essere ciò che suggerisce di formulare una congettura in un certo modo, e suggerisce almeno in parte la strada da seguire per provare a dimostrarla.

Di solito, infatti, almeno un'idea di come fare a dimostrare una congettura è suggerita dallo stesso processo di pensiero che ha portato a formularla. Magari poi quell'idea si rivela ingenua o scorretta, ma è un primo punto d'attacco del problema. Le congetture si formulano con un procedimento che non ha il rigore della logica deduttiva, ma non per questo è folle o casuale.

A questo proposito, il filosofo della scienza Karl Popper, ne *La logica della scoperta scientifica* (1934), ha sostenuto invece una tesi di questo tipo: per capire il metodo scientifico si devono distinguere bene due piani, quello del come vengono le idee e quello del come si decide se le idee, comunque siano venute, sono vere o false. Il primo attiene alla psicologia della scoperta, il secondo alla logica della scoperta. Quindi Popper si concentra su quest'ultima affermando che la psicologia della scoperta sia irrilevante ai fini della comprensione della conoscenza scientifica. Questa tesi, che è stata assorbita acriticamente in modo abbastanza generalizzato, si ritrova citata in tanti discorsi «critici» sia sulla scienza che sulla matematica. A mio avviso un'impostazione di questo tipo rende impossibile capire la natura della ricerca scientifica o matematica, nella quale la «logica» della scoperta è invece proprio il lungo filo che parte dai pensieri meno rigorosi che generano congetture, e prosegue nel rigoroso lavoro dimostrativo. Quando un matematico scrive l'articolo in cui condensa le sue ricerche di mesi, effettivamente



Karl Popper
(1902-1994)

[5]K.F. Gauss, Lettera a Bolyai, 1808.

presenta i suoi risultati in modo abbastanza asettico, ripulendo il discorso da ogni accenno non rigoroso, ma quando fa una conferenza per i suoi colleghi, se è una persona comunicativa, cerca di raccontare almeno qualcosa di quell'*iceberg* sommerso di pensieri e congetture non rigorose che hanno generato quella ricerca e quel risultato. E chi ascolta spesso impara di più da questa parte dell'esposizione che da quella puramente tecnica. Ne era convinto già Gottfried Whilhem Leibniz (1646-1716): «Niente è più importante che vedere le sorgenti dell'invenzione che sono, a mio avviso, più interessanti delle invenzioni stesse.»

Ennio De Giorgi (1928-1996)

La capacità di un ricercatore è almeno in una certa misura l'arte di fare delle buone congetture, il «fiuto» di indovinare la strada giusta prima di poter verificare che è giusta.

Ennio De Giorgi, grandissimo matematico italiano morto pochi anni fa, era noto per essere soprattutto un formidabile produttore di congetture, che i suoi collaboratori alla Normale di Pisa provavano essere esatte, quasi immancabilmente. Scriveva pochissime dimostrazioni, e senza molti dettagli, perché per lui gli enunciati corretti erano quasi «autoevidenti». Per quarant'anni le sue congetture sono state un punto di riferimento per molti ricercatori in Italia e nel mondo.

Saper insistere e saper sbagliare

La matematica non si esaurisce nell'intuizione di una buona congettura: è fatta anche del paziente e tenace lavoro di dimostrare ogni dettaglio. Il guaio è che a volte, mentre si stanno mettendo i puntini su tutte le *i*, si scopre che qualcosa non funziona. Dopo aver sistemato novantanove dettagli ci si accorge che il centesimo non si riesce a sistemare. Sono momenti di brivido, in cui si teme di dover buttare via la fatica di settimane o mesi. Infatti, nessuno può dire «al 99% ho dimostrato che questo teorema è vero»: o è dimostrato, o non è dimostrato.

Andrew Wiles, matematico di Cambridge, nel 1993 annunciò di aver dimostrato la congettura più famosa degli ultimi trecento anni, il cosiddetto «ultimo teorema di Fermat»: *L'equazione* $x^n + y^n = z^n$ *non ammette soluzioni* x, y, z *intere positive, se* n *è un intero maggiore o uguale a 3.*

Annals of Mathematics, 142 (1995), 443-551

Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem

By Andrew Wiles*

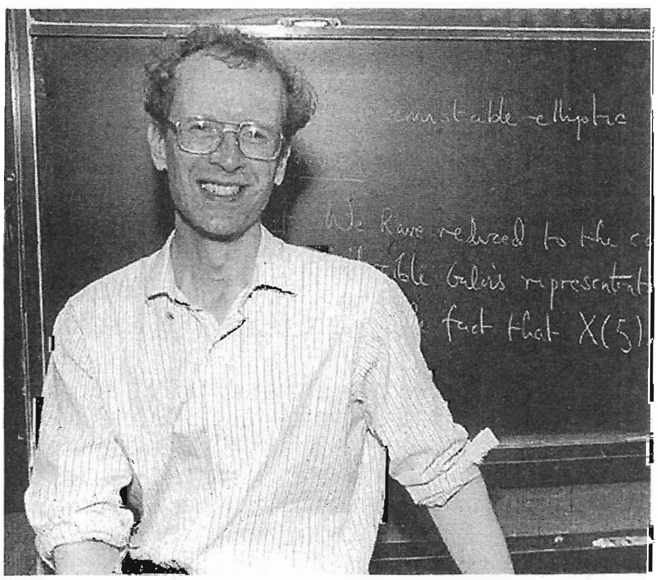
For Nada, Clare, Kate and Olivia

Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos ejusdem nominis fas est dividere: cujus rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.

Pierre de Fermat

Dopo che era già diventato famoso per il risultato, spedì il lavoro alla più prestigiosa rivista di matematica, gli *Annals of Mathematics*. Solitamente un articolo mandato a una rivista, prima di essere accettato per la pubblicazione viene letto criticamente da un *referee* che dovrebbe controllarne ogni passaggio. In questo caso un'intera squadra di *referee* fu messa al lavoro e la dimostrazione fu fatta a pezzi. Quasi ogni giorno arrivava a Wiles qualche e-mail dei suoi *referee*, che gli segnalavano piccoli o grandi problemi da sistemare (punti da chiarire o da correggere), ed egli li sistemava tutti ribattendo colpo su colpo.
A un certo punto gli fecero una critica che non riuscì a superare. Temette di aver perso tutto, e aveva dedicato sette anni della sua vita unicamente a quella dimostrazione, senza dire a nessuno fuorché a sua moglie cosa stesse facendo. Solo con l'aiuto di un altro matematico riuscì a dimostrare un risultato «di supporto», che tappava la falla esistente nel suo lavoro originale. Così lo storico volume degli *Annals* che contiene la dimostrazione dell'ultimo teorema di Fermat, pubblicato nel 1995 (due anni dopo il primo annuncio di Wiles) consiste di due articoli: uno di circa 110 pagine, a firma Andrew Wiles, e uno di una ventina di pagine, a firma Andrew Wiles e Richard Taylor, che contiene la dimostrazione di quel «Teorema di supporto» senza il quale sette anni di lavoro di Wiles non sarebbero bastati a dimostrare l'ultimo teorema di Fermat. Purtroppo nei due anni intercorsi tra l'annuncio del 1993 e la pubblicazione del 1995, Wiles aveva superato la soglia dei quarant'anni, che è il limite oltre il quale non viene assegnata la *Fields Medal*, il più prestigioso riconoscimento in campo matematico.
Non sempre le cose vanno «così bene»: talvolta il centesimo dettaglio non quadra perché la verità è che la congettura è sbagliata. Come si fa a capire qual è il momento di desistere? Fin quando si deve tenacemente cercare di risolvere il problema, e quando si deve cominciare a pensare che non lo si può risolvere perché la verità è un'altra?
Per fare ricerca bisogna avere dei pregiudizi e saper lavorare tenacemente per mostrare che sono veri; però bisogna tenere aperta anche la possibilità di essersi sbagliati ed essere pronti a cambiare strada: se la congettura è falsa, non diventerà vera a forza di insistere. Dove passa il confine tra il sano accanimento e l'ottusa ostinazione, o viceversa tra la pigrizia rinunciataria e la saggezza dell'ammettere il proprio errore? Sono sfide in cui si gioca la propria ragione tutta intera: non solo il rigore, non solo l'intuizione, non solo la capacità tecnica, non solo le sensazioni, ma tutte queste cose insieme e altre ancora.

Andrew Wiles
(1953-)



Matematica: invenzione o scoperta?

Nella fase in cui un matematico ricerca nuovi risultati, il suo modo di procedere ha qualcosa di empirico: si lascia orientare da esempi «concreti» e procede per tentativi ed errori. Dal punto di vista psicologico, è quasi inevitabile che finisca col considerare i propri risultati come la scoperta delle proprietà di certi oggetti reali, e non invece come un gioco di invenzione. E questo anche se, sul piano formale, sa che le proprietà degli oggetti matematici sono conseguenza degli assiomi che egli ha scelto di porre a base della teoria. Senza addentrarmi nel dibattito sulla natura degli oggetti matematici, discussione che negli ultimi duecento anni ha visto contrapporsi platonisti, logicisti, formalisti, intuizionisti, eccetera, mi interessa solo ribadire che la pratica della ricerca spinge a trattare gli enti matematici come oggetti «reali». E questo è certamente un altro ingrediente dell'interesse che «noi» proviamo per la matematica.

Secondo punto di sintesi: la matematica «dinamica»

❑ Nella ricerca matematica si vogliono scoprire enunciati significativi che siano veri. La dimostrazione stabilisce la verità del teorema ma, normalmente, non ne suggerisce l'enunciato: prima viene la congettura, poi la dimostrazione. In questa fase la ricerca matematica assume le caratteristiche di una ricerca empirica, per tentativi ed errori. Il fascino di questa attività di ricerca è di coinvolgere molte altre facoltà della ragione, oltre alla logica deduttiva.

❑ Inoltre, in questa ricerca, il mondo degli oggetti matematici assume il fascino di un mondo reale da esplorare. Un esempio impensato, una proprietà non immaginata, sono come un nuovo paesaggio che si apre alla vista quando si arriva a un passo di montagna.

Ho cercato di dare un'idea di cos'è e cosa non è la matematica, e indicare alcuni aspetti metodologici di questa disciplina, che a mio avviso ne costituiscono delle caratteristiche interessanti e affascinanti.

Accanto a questi, vi sono certamente anche aspetti di contenuto della matematica che la rendono affascinante per coloro che la praticano: «cose» che si studiano in matematica, e che per i matematici sono estremamente interessanti. ❖

Questo testo raccoglie la prima parte di una conferenza tenuta il 12 ottobre 2002 a Lizzola (BG) a un gruppo di studenti di Matematica.

INDICAZIONI BIBLIOGRAFICHE

B. Russell, *I principi della matematica*, Tascabili economici Newton, Roma 1989.
C. Mangione (a cura di), *Frege: Logica e aritmetica*, Boringhieri, Torino 1977.
E. Agazzi, *Introduzione ai problemi dell'assiomatica*, Vita e pensiero, Milano 1961.
S. Singh, *L'ultimo Teorema di Fermat*, Rizzoli, Milano 1997.
R. Feynman, *La legge fisica*, Boringhieri, Torino 1971.
M. Emmer, *Ennio De Giorgi* (video-intervista), Pisa luglio 1996; testo integrale in *Lettera Pristem*, n 21, settembre-ottobre 1996.