MISURA E NUMERI

CONCRETO E ASTRATTO NELLA FORMAZIONE DEGLI INSEGNANTI

di Anna Paola Longo

L'isomorfismo tra la struttura delle operazioni sulle grandezze e quelle sui numeri è presentato a partire da una questione didattica elementare, il cambiamento di unità di misura. L'autore offre un approfondimento critico sul piano concettuale di un contenuto particolare e al tempo stesso suggerisce una metodologia didattica.

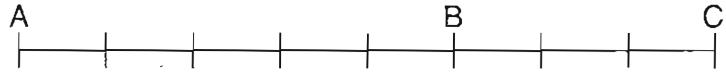
Esiste un legame strettissimo tra misura e numeri, non solo perché si misura attraverso i numeri, ma perché esistono analogie strutturali tra le operazioni che si fanno sulle grandezze e quelle che si fanno sui numeri (isomorfismo). Questo è un *leitmotiv* in tutta l'aritmetica: non solo è possibile semplificare la misura usando i numeri, ma è anche possibile usare la struttura della misura (di cui si fa esperienza diretta nelle azioni) come modello per comprendere e dare senso alle proprietà dei numeri.

Voglio evidenziare alcuni particolari di tale parallelismo e della sua possibile funzione didattica, per sottolineare che in aritmetica ricorrere al «concreto» non si riferisce tanto al fatto di far manipolare oggetti, quanto alla possibilità di compiere ed analizzare azioni di cui si evidenzia la struttura e che si impara a «tradurre» con un particolare linguaggio (in aritmetica quello delle operazioni e delle loro proprietà). Esplicito in questo modo l'idea di Fischbein di «modello generativo».

Limitiamoci a considerare il cambiamento di unità di misura e mostriamo alcuni suoi legami forti con i concetti aritmetici, anche in questo caso pensando soprattutto a una traccia per la formazione, cioè a una base concettuale per una rielaborazione didattica, che deve poi essere generata dall'insegnante secondo i suggerimenti di Freudenthal della «reinvenzione guidata», di cui più volte ci siamo già occupati per la matematica su questa rivista.

Le frazioni

Un modo possibile di generare una frazione (intesa come operatore) è fare riferimento a un cambiamento di unità di misura in una classe di grandezze. Questa via dà significato alle frazioni improprie, oltre che a quelle proprie. Al contrario la concezione di frazione come parte di un intero non si adatta alla frazione impropria, a cui comunque occorre dare senso prima di iniziare a introdurre operazioni sulle frazioni (ricordiamo che per esempio 4/4 + 3/4, somma di due frazioni proprie, è una frazione impropria). Ecco un esempio:



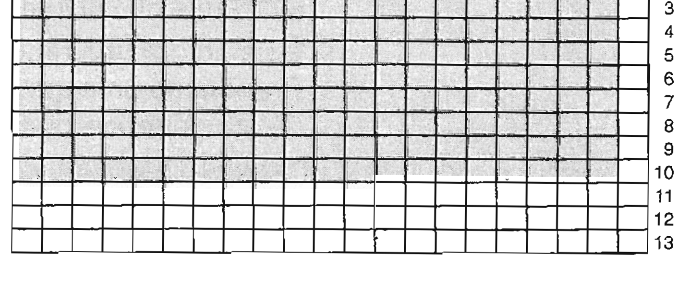
se AB é l'unità iniziale, abbiamo $AB < AC < 2AB$; se passiamo alla nuova unità $U' = 1/4\ AB$, allora é esattamente $AC = 7U' = 7\ (1/4\ AB) = 7/4\ AB$, dove la scrittura è una convenzione. Utilizzando poi il modello di rappresentazione dei numeri su una retta, la frazione 7/4 trova immediatamente la sua ben nota collocazione. In questo caso, ovviamente, tutte le frazioni rappresentate sulla retta sono riferite alla stessa unità.

Decimali

Se l'unità iniziale é divisa in dieci parti, questo stesso ragionamento permette di introdurre i decimi, e poi analogamente i centesimi, eccetera. Per queste particolari frazioni si introduce anche una rappresentazione formale diversa: il numero decimale. Se infatti si riprende la scrittura posizionale dei numeri naturali, essa si può prolungare (a destra delle unità, con la consueta virgola) per contare i decimi, i centesimi, eccetera. La virgola é solo un accorgimento per segnalare l'unità scelta: se si sposta la virgola si cambia l'unità e viceversa.

Moltiplicazione tra decimali

Attraverso il cambiamento di unità di misura si può dare senso a moltiplicazione e divisione con i decimali. Serviamoci di un esempio: $1{,}3 \cdot 2{,}1$. Possiamo interpretare i due fattori come dimensioni di un rettangolo rispetto ad una stessa unità di misura, per esempio 1,3 dm e 2,1 dm. Per calcolare l'area del rettangolo, torniamo alla situazione iniziale (che supponiamo nota: misure intere dei lati) trasformando l'unità in modo che le misure diventino intere: ci troviamo allora a considerare un rettangolo di dimensioni 13 cm e 21 cm. La griglia fatta rispetto ai centimetri ci dice allora che l'area é il prodotto delle due dimensioni (intere): $13 \cdot 21\ cm^2$, cioè $273\ cm^2$. Possiamo ora tornare all'unità precedente, trasformando questo risultato in dm^2. La zona scurita in figura misura $2\ dm^2$, il resto é $73\ cm^2$ che non bastano a comporre additivamente un altro dm^2. Possiamo dunque affermare che l'area è $2\ dm^2 + 73\ cm^2$.



Utilizzando la rappresentazione nota per i decimali, possiamo usare la virgola (evitando di ricorrere a una somma) e scrivere che l'area é 2,73 dm^2. Questo risultato è lo stesso che si ottiene sinteticamente moltiplicando in colonna $1,3 \cdot 2,1$ e dando la regola usuale per la virgola. Bisogna però osservare e far osservare che, nonostante l'analogia dell'algoritmo, questa è un'operazione diversa dalla moltiplicazione in N, anche se si costruisce per suo tramite. La divisione poterebbe essere costruita come operazione inversa con passaggi analoghi.

Frazione e divisione

Tentiamo ora di formulare un percorso concettuale per dare significato all'identificazione tra frazione e divisione, qualora si sia a lungo lavorato con questi due concetti senza evidenziarne fin dall'inizio i legami. Iniziamo con una frazione decimale e chiediamoci, per esempio, perché poniamo $7/4 = 1,75$ essendo 1,75 il quoziente dei due numeri 7 e 4.
Esaminiamo anzitutto il significato dell'algoritmo della divisione. Esso procede individuando successivamente le approssimazioni del rapporto.

Primo passaggio

$$\begin{array}{r|l} 7 & 4 \\ \cline{2-2} 3 & 1 \end{array}$$

Significato: $7 = 4 \cdot 1 + 3$, e dunque $4 \cdot 1 < 7 < 4 \cdot 2$ oppure $1 < 7:4 < 2$

Secondo passaggio

$$\begin{array}{r|l} 7 & 4 \\ \cline{2-2} 30 & 1,7 \\ \underline{28} & \\ 02 & \end{array}$$

Significato: $7 = 4 \cdot 1,7 + 0,2$; $4 \cdot 1,7 < 7 < 4 \cdot 1,8$; oppure $1,7 < 7 : 4 < 1,8$

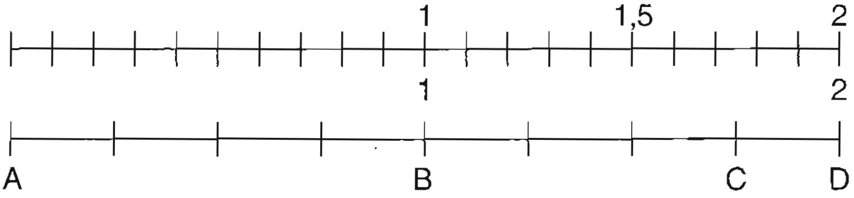
Terzo passaggio

$$\begin{array}{r|l} 7 & 4 \\ \cline{2-2} 30 & 1,75 \\ \underline{28} & \\ 020 & \\ \underline{20} & \\ // & \end{array}$$

qui abbiamo $q = 1,75$ e $r = 0$; possiamo scrivere esattamente $7 = 4 \cdot 1,75$ e cioè $7 : 4 = 1,75$.

Usiamo ora una rappresentazione geometrica per le grandezze. Prendiamo un segmento di lunghezza 2 (immagine di una grandezza generica di misura 2) e chiediamoci quale sia la rappresentazione decimale della lunghezza del segmento che corrisponde alla frazione 7/4. Anche in questo caso possiamo compiere delle approssimazioni successive.

Seguiamo dunque il procedimento pensando sul segmento due diversi sistemi di misura: nel primo l'unità AB è divisa in 10 parti, nel secondo è divisa in 4 parti. La domanda è sulla misura dei segmenti disegnati sulla seconda riga rispetto all'unità della prima, cioè rispetto ai decimali.



m (AB) = 1;   m (AD) = 2;   m (AC) =?

Si costruiscono facilmente delle approssimazioni successive:

$1 < m(AC) < 2$

$1{,}5 < m(AC) < 2$ infatti $1{,}5 = 15/10 = 6/4$ e quindi $6/4 < 7/4$

$1{,}6 < m(AC) < 2$ infatti $1{,}6 = 16/10 < 7/4$ $(16/10 = 64/40$ e $7/4 = 70/40)$

$1{,}6 < m(AC) < 1{,}8$ infatti $1{,}8 = 18/10 = 72/40$

$1{,}7 < m(AC) < 1{,}8$ infatti $1{,}7 = 17/10 = 68/40$

In questo modo abbiamo ottenuto un'approssimazione della misura cercata con la prima cifra decimale esatta e possiamo porre

$$m(AC) = 1{,}7 + r \quad \text{con } r < 1/10.$$

Se proseguiamo con questo stesso metodo per cercare la seconda cifra decimale, otteniamo con alcuni passaggi analoghi m (AC) = 1,75. Ci si accorge che il procedimento di approssimazione decimale del valore della frazione 7/4 é identico al processo di approssimazione espresso dalla divisione precedente e ciò appare sufficiente per giustificare l'identificazione.

Si può procedere nello stesso modo se la frazione non é decimale. In questo caso il processo di approssimazione non ha termine e si sconfina in delicate questioni di convergenza.

L'analogia di quest'esempio con i precedenti é che accostarsi al numero razionale identificando la frazione con un decimale é reso significativo da un modello operativo basato sulla misura. Il livello concreto in questo caso è quello della misura (non solo eseguita, ma soprattutto immaginata) mentre il livello astratto è quello del numero razionale. ❖

INDICAZIONI BIBLIOGRAFICHE

E. Fischbein, *Concreto ed astratto nell'insegnamento della matematica elementare*, in: G. Prodi, *Processi cognitivi ed apprendimento della matematica nella scuola elementare*, La Scuola, Brescia 1981.

H. Freudenthal, *Ripensando l'educazione matematica*, La Scuola, Brescia 1994, (ed. orig. 1991).