

## JOHN NASH AND A BEAUTIFUL MIND\*

di John Milnor\*\*

*L'autore, da quarant'anni uno dei più noti e apprezzati matematici a livello internazionale, presenta il matematico John Nash attraverso la recensione del libro di Silvia Nasar, da cui è stato tratto il recente film di Ron Howard che racconta la storia di Nash in un intreccio drammatico tra grandezza umana e grandezza scientifica. La vicenda scientifica di questo grande matematico non si è esaurita in una geniale elaborazione nel campo della teoria dei giochi, ma ha aperto nuove strade in matematica pura e applicata. Nel 1994 gli è stato conferito il premio Nobel per l'Economia; nel tempo la sua ricerca ha avuto conseguenze importanti anche nelle scienze politiche e nella riflessione sulle teorie evolutive.*

**J**ohn Forbes Nash Jr. pubblicò il suo primo articolo, insieme al padre, a diciassette anni. La sua tesi, scritta a ventuno anni, presentò idee matematiche chiare ed elementari, che inaugurarono una lenta rivoluzione in campi diversi come l'economia, le scienze politiche e la biologia evolutiva. Durante i successivi nove anni, in un sorprendente slancio di attività matematica, egli affrontò e spesso risolse i più difficili e importanti problemi che poté trovare in geometria e in analisi. Poi, a causa di una grave malattia mentale, passò trent'anni dolorosissimi, caratterizzati da frequenti ricoveri ospedalieri e da rari momenti di remissione. Tuttavia, negli ultimi dieci anni, c'è stata una decisa ripresa e un ritorno all'attività matematica. Nel frattempo l'importanza del lavoro di Nash ha avuto numerosi riconoscimenti: ha ricevuto il premio von Neumann ed è stato chiamato a far parte della *Econometric Society*, della *American Academy of Arts and Sciences* e della *U.S. National Academy of Sciences*; infine, nel 1994 gli è stato assegnato il premio Nobel.

### ***A Beautiful Mind***

La biografia scritta da Sylvia Nasar, *A Beautiful Mind*<sup>1</sup>, racconta questa storia in dettaglio e basandosi su una accurata documentazione: centinaia di interviste con amici, familiari, conoscenti e colleghi e uno studio dei documenti disponibili. L'autrice è certamente un'intervistatrice capace e in qualche caso sembra portare alla luce notizie ben al di là di quanto ci si potrebbe aspettare. Presenta descrizioni dettagliate

\*Apparso su *Notices of the American Mathematical Society*, vol.45, Novembre 1998. Si ringrazia l'autore per avere gentilmente autorizzato la pubblicazione di questo articolo. La traduzione è di Giancarlo Travaglini.  
\*\*Direttore dell'*Institute for Mathematical Sciences* alla *State University* di New York, Stony Brooks. Nel 1962 gli è stata conferita la *Fields Medal*.

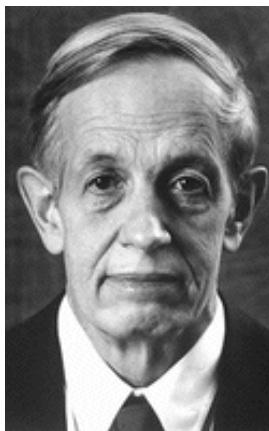
<sup>1</sup>S. Nasar, *A Beautiful Mind*, Simon & Schuster, 1998. Edizione italiana: *Il genio dei numeri - Storia di John Nash, matematico e folle*, Rizzoli, Milano 2002. (NdT)

delle delibere relative non solo alle *Fields Medals*<sup>2</sup> del 1958, per le quali Nash era uno dei possibili candidati, ma anche al premio Nobel per l'Economia del 1994 - delibere così esplosive da condurre a una radicale ristrutturazione del premio e a un completo cambiamento della commissione per le nomine dei candidati. Di solito le fonti utilizzate dall'autrice vengono citate con cura, ma in questi casi rimangono anonime.

Nonostante la sua formazione sia in economia e non in matematica, la Nasar riesce a presentare il quadro, i concetti essenziali e bibliografie precise dei principali lavori di Nash. Anche i fatti relativi ai luoghi e alle persone che hanno influenzato la sua vita sono ampiamente illustrati. Gli enunciati matematici e i termini specifici sono a volte un po' «ingarbugliati», ma il lettore accorto può facilmente capire cosa significano. Troviamo così informazioni affascinanti sulla storia di *Carnegie Tech*, di Princeton, della *Rand Corporation*, del MIT, dell'*Institute for Advanced Study* e del *Courant Institute*, e anche notizie su personalità matematiche note e meno note. La presentazione conduce a molte interessanti divagazioni: la descrizione del MIT è intrecciata con una discussione del maccartismo, mentre la descrizione della Rand Corporation e di von Neumann porta a una discussione sulla relazione tra la teoria dei giochi e le politiche della guerra fredda (von Neumann, che propugnava un attacco preventivo contro l'Unione Sovietica potrebbe essere stato il modello originale per *Il Dottor Stranamore* di Kubrick).

Qualsiasi discussione sul libro della Nasar deve mettere in evidenza un dilemma etico centrale: questa è una biografia non autorizzata, scritta senza il consenso né la collaborazione del protagonista. L'attività matematica di Nash è stata accompagnata da una vita personale intricata, che la Nasar descrive con molti particolari. Senza dubbio questo materiale è interessante per un vasto pubblico (Oliver Sacks, citato nella fascetta pubblicitaria, scrive che il libro è «straordinariamente commovente e notevole per la grande sensibilità con cui sono guardati sia il genio che la schizofrenia».) Inevitabilmente, però, la pubblicazione di un tale materiale comporta una drastica violazione della *privacy*.

Il libro è dedicato ad Alicia Nash, prima sua moglie e poi incrollabile compagna, il cui sostegno attraverso difficoltà impossibili ha chiaramente avuto un ruolo fondamentale nella sua guarigione.



John F. Nash (1928- )

### L'attività scientifica di Nash

I matematici puri tendono a giudicare qualsiasi lavoro nelle scienze matematiche in base alla sua profondità matematica e a quanto di nuovo introduce in idee e metodi, oppure al fatto che risolva problemi aperti da molto tempo. Da questo punto di vista il lavoro di Nash pre-

miato è una ingegnosa ma non sorprendente applicazione di metodi noti, mentre il suo lavoro matematico successivo è ben più ricco e importante. Durante gli anni seguenti egli dimostrò che ogni varietà liscia compatta può essere realizzata come un foglio di una varietà algebrica reale<sup>3</sup>, dimostrò il teorema di immersione isometrica  $C^1$ , teorema molto poco intuitivo, introdusse strumenti potenti e radicalmente nuovi per provare l'ancora più difficile teorema di immersione isometrica  $C^\infty$  in dimensione alta, e fece un primo importante passo in fondamentali teoremi di esistenza, unicità e continuità per equazioni differenziali alle derivate parziali. (Cfr. [K1] e [M] per alcune ulteriori discussioni di questi risultati.)

Comunque, quando la matematica è applicata ad altri campi della conoscenza, dobbiamo in realtà porre una domanda di tipo diverso: fino a che punto il nuovo lavoro aumenta la conoscenza del mondo reale? Su questa base, la tesi di Nash è stata senz'altro rivoluzionaria (Cfr. [N21] e anche [U].) Il campo della teoria dei giochi fu la creazione di John von Neumann e fu sviluppato in collaborazione con Morgenstern (un articolo molto antecedente era stato scritto da Zermelo.) La teoria di von Neumann-Morgenstern dei giochi a due giocatori e somma zero era estremamente soddisfacente e aveva certamente applicazioni in campo bellico, come era stato ampiamente osservato dai militari. Aveva però poche altre applicazioni. I loro sforzi per sviluppare una teoria dei giochi per  $n$  persone oppure a somma non nulla, allo scopo di applicarla in ambito economico, furono in realtà di scarsa utilità. (Sia Nash che l'autore di questo articolo parteciparono a uno studio sperimentale sui giochi a  $n$  persone [N10]. Per quanto ne so, nessuno studio di questo tipo è mai stato in grado di trovare un'ampia correlazione tra le «soluzioni» di von Neumann-Morgenstern e il mondo reale.)

Nash, nella sua tesi, fu il primo a evidenziare la distinzione tra i giochi «cooperativi», come quelli studiati da von Neumann e Morgenstern (grosso modo questi sono i giochi in cui i partecipanti possono sedersi in una stanza piena di fumo e negoziare tra di loro), e i più fondamentali giochi «non cooperativi», dove una tale negoziazione non avviene. Di fatto, il caso cooperativo può di solito essere ridotto al caso non cooperativo incorporando le possibili forme di cooperazione nella struttura formale del gioco. Nash fece un importante passo sui giochi cooperativi nel suo articolo [N5] sul problema della contrattazione, in una certa misura concepito quando era ancora uno studente *undergraduate*. (Uno studio collegato e molto antecedente è dovuto a Zeuthen.) In una delle osservazioni presenti in questo articolo Nash avanzava l'ipotesi che ogni gioco cooperativo dovesse avere un «valore» che esprime, per ciascun giocatore, «il vantaggio dell'opportunità di prendere parte al gioco». Un tale valore fu formulato alcuni anni più tardi da Shapley.

<sup>2</sup>Le *Fields Medals* vengono assegnate ogni quattro anni durante il Congresso Mondiale dei Matematici e svolgono un ruolo analogo a quello che il premio Nobel ha per altre discipline scientifiche. (NdT)

<sup>3</sup>Artin e Mazur usarono questo lavoro per provare l'importante risultato che ogni applicazione liscia di una varietà compatta in sé può essere approssimata da una per la quale il numero dei punti periodici di periodo  $p$  è minore di una certa funzione esponenziale di  $p$ . Per oltre trent'anni questa è stata l'unica dimostrazione nota. Comunque recentemente Kato ha trovato un argomento molto più elementare, basato sul Teorema di Approssimazione di Weierstrass.

Comunque, il contributo più importante, che gli procurò il premio Nobel, fu la teoria non cooperativa. Nash introdusse il concetto fondamentale di «punto di equilibrio»: un insieme di strategie dei diversi giocatori tale che nessun giocatore può migliorare il suo risultato cambiando solo la propria strategia. (Qualcosa di molto simile a questo concetto era stato introdotto da Cournot più di cento anni prima.) Con un'intelligente applicazione del Teorema di Punto Fisso di Brouwer egli mostrò che esiste sempre almeno un punto di equilibrio. (Per descrizioni più dettagliate cfr. [OR], [M].) Nel corso degli anni gli sviluppi originati dall'idea apparentemente semplice di Nash hanno portato a fondamentali cambiamenti nell'economia e nelle scienze politiche. La Nasar illustra, al dollaro e al centesimo, l'impatto delle idee della teoria dei giochi descrivendo «La più grande asta di tutti i tempi»<sup>4</sup> quando, nel 1994, il governo degli Stati Uniti mise in liquidazione larghe porzioni dello spettro elettromagnetico agli utenti commerciali. Una procedura a più giri fu accuratamente progettata da esperti nella teoria dei giochi di aste, per massimizzare sia il guadagno per il

## PUBBLICAZIONI DI JOHN NASH

- [N1] J.F.Nash Jr. (con J.F.Nash Sr.), *Sag and tension calculations for wire spans using catenary formulas*, Elect. Eng. (1945).
- [N2] J.F.Nash Jr., *Equilibrium points in n-person games*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 36 (1950), 48-49. (Anche in [K2].)
- [N3] \_\_\_\_\_, *Non-cooperative games*, Thesis, Princeton University, May 1950.
- [N4] J.F.Nash Jr. (con L.S. Shapley), *A simple three-person poker game*, *Contributions to the theory of games*, Ann. Math. Stud. 24, Princeton Univ. Press, 1950, pp. 105-116.
- [N5] \_\_\_\_\_, *The bargaining problem*, *Econometrica* 18 (1950), 155-162. (Anche in [K2].)
- [N6] \_\_\_\_\_, *Non-cooperative games*, Ann. Math. 54 (1951), 286-295. (Anche in [K2].)
- [N7] \_\_\_\_\_, *Real algebraic manifolds*, Ann. Math. 56 (1952), 405-421. (Vedi anche Proc. Internat. Congr. Math., 1950, (AMS, 1952), pp. 516-517.)
- [N8] J.F.Nash Jr. (con J.P. Mayberry e M. Shubik), *A comparison of treatment of a duopoly situation*, *Econometrica* 21 (1953), 141-154.
- [N9] \_\_\_\_\_, *Two-person cooperative games*, *Econometrica* 21 (1953), 128-140.
- [N10] J.F.Nash Jr. (con C. Kalisch, J. Milnor e E. Nering), *Some experimental n-person games*, *Decision Processes*, (Thrall, Coombs and Davis, eds.), Wiley, 1954, pp. 301-327.
- [N11] \_\_\_\_\_, *C<sup>1</sup>-isometric imbeddings*, Ann. Math. 60 (1954), 383-396. (Vedi anche Bull. Amer. Math. Soc. 60 (1954), 157.)
- [N12] \_\_\_\_\_, *Results on continuation and uniqueness of fluid flow*, Bull. Amer. Math. Soc. 60 (1954), 165-166.
- [N13] \_\_\_\_\_, *A path space and the Stiefel-Whitney classes*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 41 (1955), 320-321.
- [N14] \_\_\_\_\_, *The imbedding problem for Riemannian manifolds*, Ann. Math. 63 (1956), 20-63. (Vedi anche Bull. Amer. Math. Soc. 60 (1954), 480.)
- [N15] \_\_\_\_\_, *Parabolic equations*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 43 (1957), 754-758.
- [N16] \_\_\_\_\_, *Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations*, Amer. J. Math. 80 (1958), 931-954.
- [N17] \_\_\_\_\_, *Le problème de Cauchy pour les équations différentielles d'un fluide général*, Bull. Soc. Math. France 90 (1962), 487-497.
- [N18] \_\_\_\_\_, *Analyticity of the solutions of implicit function problems with analytic data*, Ann. Math. 84 (1966), 345-355.
- [N19] \_\_\_\_\_, *Autobiographical essay*, Les Prix Nobel 1994, Stockholm: Norsted Tryckeri, 1995.
- [N20] \_\_\_\_\_, *Arc structure of singularities*, Duke J. Math. 81 (1995), 31-38. (Written in 1966).
- [N21] J.F.Nash Jr. (con H. Kuhn, J. Harsanyi, R. Selten, J. Weibull, E. Van Damme e P. Hammerstein), *The work of John F. Nash Jr. in game theory*, Duke J. Math. 81 (1995), 1-29.

Esiste inoltre un certo numero di note della *Rand Corporation* scritte da Nash su argomenti diversi, quali l'organizzazione della memoria e il controllo parallelo (Nasar, pp. 403, 407, 411, 436), e anche una conferenza non pubblicata, tenuta al Congresso Mondiale di Psichiatria a Madrid nel 1996.

governo che l'utilità per i rispettivi acquirenti delle lunghezze d'onda acquistate. Il risultato fu un grande successo, che portò 10 miliardi di dollari al governo e nello stesso tempo garantì un'efficiente distribuzione delle risorse. Per contrasto, in Nuova Zelanda, un'asta dello stesso tipo, senza un'accurata preparazione secondo la teoria dei giochi, si rivelò un fallimento: il governo realizzò soltanto circa il 15% del guadagno atteso e le lunghezze d'onda non furono distribuite in modo efficiente. (In un caso, uno studente neozelandese comprò una licenza per una stazione televisiva al costo di un dollaro!)

Un trionfo totalmente inatteso della teoria dell'equilibrio è stata la sua applicazione alla genetica delle popolazioni e alla biologia evolutiva. Basate sul lavoro pionieristico di Maynard Smith, le idee della teoria dei giochi sono ora applicate alla competizione tra diverse specie o all'interno di una stessa specie. (Cfr. [MS], [HS], [W]. Una forma più precisa di questa teoria, divulgata da Dawkins [D1], sostiene che la competizione è piuttosto tra singoli geni.) C'è stato anche un interessante ritorno di idee, dall'evoluzione all'economia. Secondo Binmore (in [W]): «Malgrado le osservazioni di Nash nella sua tesi sulla possibile interpretazione dell'idea di un equilibrio di Nash in termini evolutivi<sup>5</sup>, l'attenzione a quel tempo si focalizzò quasi completamente sulla sua interpretazione come il solo esito vitale di un accurato ragionamento da parte di giocatori idealmente razionali. [...] Fortunatamente [...] il libro *Evolution and the Theory of Games* di Maynard Smith diresse l'attenzione degli studiosi di teoria dei giochi lontano dalle loro sempre più elaborate definizioni di razionalità. Dopo tutto, è difficile sostenere che gli insetti pensano, e quindi la razionalità non può essere troppo cruciale se la teoria dei giochi è in qualche modo in grado di prevedere il loro comportamento sotto opportune condizioni. Nello stesso tempo, l'avvento dell'economia sperimentale ci ha fatto comprendere il fatto che anche i soggetti umani non sono nulla di straordinario nel loro pensiero. Quando trovano la loro strada verso un equilibrio del gioco, tipicamente lo fanno procedendo per tentativi. In tutte le applicazioni deve essere sottolineato un corollario molto importante: la teoria dell'equilibrio, così come sviluppata da Nash e dai suoi successori, sembra fornire la miglior descrizione conosciuta di ciò che è probabile che accada in una situazione di competizione, ma un equilibrio non è necessariamente un buon risultato per tutti.

Contrariamente alla classica teoria economica di Adam Smith, dove la libera competizione conduce ai migliori risultati possibili, e contrariamente alla classica teoria darwiniana, dove la selezione naturale conduce sempre a un miglioramento delle specie<sup>6</sup>, l'effettiva dinamica di competizione non regolata può essere disastrosa. Tutti sappiamo che il conflitto politico tra le nazioni può portare a

<sup>5</sup>Questo articolo è del 1998 e da allora si sono svolte altre aste di grande rilievo, non sempre con i risultati attesi. (NdT)

<sup>6</sup>Qui Binmore non si riferisce all'evoluzione biologica, ma piuttosto a un processo dinamico in cui giri ripetuti di un gioco convergono a un equilibrio. Sfortunatamente, questa discussione a partire dalla tesi di Nash non appare nel suo lavoro pubblicato.

<sup>7</sup>Secondo Darwin, «Poiché la selezione naturale lavora unicamente da e per il bene di ogni essere, tutte le doti del corpo e della mente tenderanno a progredire verso la perfezione.» Egli esprime però anche un punto di vista opposto. Si veda anche la discussione su «perché il progresso non guida la storia della vita» in Gould [G1]. Sfortunatamente ci sono state molte inutili incomprensioni e avversioni tra quelli come Maynard Smith che lavorano con i modelli teorici dell'evoluzione e quelli come Gould [G2] che sottolineano che il mondo reale è più complicato di qualsiasi modello.

una corsa agli armamenti che non è un bene per chi vi è coinvolto e in casi estremi può portare a una guerra assolutamente non necessaria. In modo simile, nelle teorie evolutive, una corsa agli armamenti all'interno di una specie o tra specie in competizione, su tempi geologici, può essere estremamente dannosa.<sup>7</sup> Infatti sembra perfettamente concepibile che la selezione naturale possa a volte condurre a un vicolo cieco ed eventualmente all'estinzione. Quella che segue è una versione lievemente esagerata di un esempio dovuto a Darwin. (Cfr. [D3], [D4]). Supponiamo che una femmina di pavone scelga sempre il maschio con la coda più bella. Questo comporta una corsa agli armamenti durante la quale le code diventano via via più grandi, fino a quando i maschi risultano così impacciati da non poter sfuggire ai predatori.

Considerazioni simili si applicano alle teorie economiche. In questo caso si spera che regole di governo opportunamente scelte possano modulare gli effetti negativi della competizione sfrenata e condurre a un migliore risultato per tutti gli interessati. Comunque, la domanda su chi farà le scelte opportune è naturalmente una questione politica e conduce a un problema di teoria dell'equilibrio ancor più complicato. ▽

<sup>7</sup>Cfr. [DK], [D2]. Interpretando l'espressione «corsa agli armamenti» in un contesto evolutivo, ricordate che il successo riproduttivo è più importante della bravura in battaglia. La migliore strategia evolutiva è spesso «fare l'amore, non la guerra».

## INDICAZIONI BIBLIOGRAFICHE

- [AM] M. Artin e B. Mazur, *On periodic points*, Ann. Math. 81 (1965), 82-89.  
 [C] A.A. Cournot, *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*, 1838.  
 [D1] R. Dawkins, *The Selfish Gene*, Oxford Univ. Press, 1976.  
 [D2] ———, *The Extended Phenotype*, Oxford Univ. Press, 1982.  
 [D3] ———, *The Blind Watchmaker*, Norton, 1986.  
 [D4] ———, *River out of Eden*, BasicBooks, Harper Collins, 1995.  
 [DK] R. Dawkins e J.R. Krebs, *Arms races between and within species*, Proc. Royal Soc. B 205 (1979), 489-511.  
 [G1] S.G. Gould, *Full House*, Harmony Books, 1996.  
 [G2] ———, *Darwinian Fundamentalism*, New York Review of Books, June 12, 1997, 34-37.  
 [HS] P. Hammerstein e R. Selten, *Game theory and evolutionary biology*, *Handbook of Game Theory with Economic Applications*, vol. 2, (Aumann and Hart, eds.), Elsevier, 1994, pp. 929-993.  
 [Ka] V. Kaloshin, *Generic diffeomorphisms with superexponential growth of number of periodic orbits*, Comm. Math. Phys. 211 (2000), 253-271.  
 [K1] H. Kuhn, *Introduction to "A celebration of John f. Nash Jr."*, Duke Math. J. 81 (1995), dedicated to Nash.  
 [K2] ——— (ed.), *Classics in game theory*, Princeton Univ. Press, 1982.  
 [MS] J. Maynard Smith, *Evolution and the theory of games*, Cambridge Univ. Press, 1982.  
 [M] J. Milnor, *A nobel prize for John Nash*, Math. Intelligencer 17 (1995), 11-17; 56.  
 [Nas] S. Nasar, *A beautiful mind*, Vanity fair (June 1998), 196-201, 224-230. (Una versione estremamente concentrata del libro, con foto a colori).  
 [No] A. Nobile, *Some properties of Nash blowing-up*, Pacific J. Math. 60 (1975), 297-305.  
 [OR] M. Osborn e A. Rubinstein, *A course in game theory*, MIT Press, 1994.  
 [S] L.S. Shapley, *A value for n-person games*, *Contributions to the Theory of Games II*, Ann. Math. Stud. vol. 28, Princeton Univ. Press, 1953, pp. 307-317. (Anche in [K2])  
 [U] G. Umbhauer, *John Nash, un visionnaire de l'économie*. Gaz. Math. 65 (1995), 47-69.  
 [vN] J. von Neumann, *Zur Theorie der Gesellschaftspiele*, Math. Ann. 100 (1928), 295-320.  
 [vNM] J. von Neumann e O. Morgenstern, *Theory of games and economic behaviour*, Princeton Univ. Press, 1944.  
 [W] J. Weibull, *Evolutionary game theory*, MIT Press, 1995. (Introduzione di K. Binmore.)  
 [Zer] E. Zermelo, *Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels*, Proc. 5th International Congress of Mathematicians, vol. 2, Cambridge Univ. Press, 1913, 501-504.  
 [Zeul] F. Zeuthen, *Problems of monopoly and economic welfare*, Routledge, London, 1930.