LA MISURA

OSSERVAZIONI, COMMENTI, PROPOSTE

PARTE SECONDA**

*di Anna Paola Longo**

L'autore sviluppa alcuni approfondimenti del concetto di misura, fondamentale nell'insegnamento della matematica e delle scienze sperimentali. Dalle scuole elementari fino all'università non è inutile ritornare ciclicamente sul contenuto di questo termine in relazione a contesti concettuali diversi. Per questo varrà la pena, nei prossimi numeri, riflettere sia su esperienze proposte ai bambini, sia sulle astrazioni massime raggiungibili nei corsi di matematica sulla teoria delle misure.

Punti di vista diversi

Parlando di misura, una questione da evidenziare e approfondire è la diversità dei punti di vista caratteristici della fisica, e delle scienze sperimentali in genere, e della matematica.
Mentre in fisica è essenziale tenere conto delle operazioni reali con cui si opera una certa misura, e quindi in particolare della sensibilità degli strumenti e dei limiti della percezione, in matematica l'interesse è volto alla descrizione del procedimento, prescindendo dalle condizioni concrete in cui esso si realizza.
La matematica costruisce modelli ideali, che si rivelano di grande utilità, perché su di essi è più agevole riflettere per comprendere le caratteristiche dei processi reali. In questo modo le formulazioni astratte della matematica permettono di realizzare una grande economia di pensiero, con il frutto di una maggiore chiarezza, almeno per chi non è disturbato dal simbolismo matematico.
Molto interessanti a questo proposito sono alcune osservazioni di A.N. Whitehead sulla periodicità: «La matematica fornisce la base del pensiero immaginativo col quale gli uomini di scienza affrontano l'osservazione della natura. [...] Nei secoli sedicesimo e diciassettesimo, la teoria della periodicità assunse nella scienza un posto fondamentale; Keplero scoprì una legge che correla gli assi maggiori delle orbite planetarie con i periodi in cui i singoli pianeti percorrono le rispettive orbite; Galileo osservò le oscillazioni periodiche dei pendoli; Newton spiegò il suono come dovuto alle perturbazioni dell'aria per il passaggio di onde periodiche

**RIASSUNTO PARTE PRIMA

Si parte dall'importanza di una approfondita conoscenza della misura per una buona comprensione dei concetti scientifici, compresi quelli matematici.
Dopo una rassegna di significati della parola misura nella lingua italiana, si sottolinea il significato tecnico, nel quale è essenziale la funzione dei numeri.
La misura ha un ruolo fondamentale nell'esperienza umana, perché è una fonte di previsione dell'andamento di molti fenomeni.

di condensazione e di rarefazione; Huygens spiegò la luce in termini di onde trasversali di vibrazioni di un etere sottile; Mersenne stabilì la relazione tra il periodo delle vibrazioni di una corda di violino e lo spessore, la tensione e la lunghezza della corda stessa. La nascita della fisica moderna è frutto dell'applicazione del concetto astratto di periodicità a una grande varietà di casi concreti. Ma questa sarebbe stata impossibile se i matematici non avessero prima elaborato, in astratto, le diverse idee che si concentrano attorno al concetto di periodicità. La trigonometria ha avuto origine dallo studio delle relazioni tra gli angoli del triangolo rettangolo e i rapporti fra cateti e ipotenusa del triangolo. Poi, sotto l'influsso della nuova matematica dell'analisi delle funzioni, si è estesa allo studio delle funzioni periodiche astratte semplici che configurano ed esprimono tali rapporti in generale. In questo modo, la trigonometria è diventata completamente astratta, e, diventando astratta, è diventata utile. Essa ha illuminato l'analogia di base tra gruppi di fenomeni fisici completamente diversi; e, al tempo stesso, ha fornito gli strumenti con cui le diverse particolarità di un gruppo potevano essere analizzate tra loro. Non c'è nulla che colpisca più di questo fatto: via via che la matematica si elevava e appartava nelle regioni più alte del pensiero astratto tornava poi a terra come uno strumento sempre più importante per l'analisi dei fatti concreti.»[1]

Modelli matematici

Dal punto di vista matematico non si può parlare in modo unico della misura, ma si deve piuttosto ricercare quali siano i modelli matematici con essa collegati. Ne esistono almeno due: il modello insiemistico, come per i pesi e le lunghezze, che utilizza numeri reali positivi, e il modello modulare legato alla periodicità, come per gli angoli e i giorni della settimana, che utilizza «classi di resti». Ma non è detto che restino gli unici. Sappiamo infatti che se si misurano pesi o grandezze geometriche, vale la fondamentale proprietà di additività, che però non vale più se si misura la temperatura. Ecco dunque un'altra grossa differenziazione di modelli. Ci chiederemo anche che cosa voglia dire misurare una forza o una velocità, e quale sia il modello matematico pertinente a questi tipi di fenomeni. Oppure quale sia il modello adatto alla misura di grandezze dotate di versi opposti, come per esempio quando si contano i passi.

Tenteremo di approfondire, di seguito, alcuni punti del vasto panorama presentato, senza pretendere di essere esaustivi e tenendo sempre molto presenti le domande che l'insegnamento ci pone. Cercheremo di precisare i prerequisiti necessari per affron-

tare a scuola l'argomento «misura» e cercheremo anche di approfondire la questione dei legami che uniscono la misura con alcuni concetti matematici fondamentali, come per esempio la struttura degli insiemi numerici, il concetto di frazione e di numero razionale.

Misura su un insieme: classi di grandezze omogenee

Ordine e uguaglianza

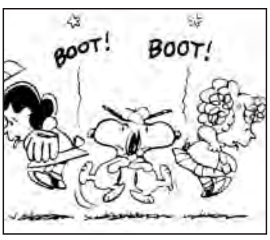
Passiamo ora a descrivere i passi che si compiono quando si misurano in modo diretto una lunghezza, un peso, un'area, un volume, una capacità, cioè quando si opera in una situazione di tipo insiemistico.
Anzitutto occorre che gli elementi della classe che si considera siano ordinabili, e cioè che esista una relazione d'ordine totale nell'insieme. Questa relazione non è di ordine «stretto», ma di ordine «largo», cioè quando operiamo il confronto possiamo trovarci di fronte a due possibilità: o che una delle due grandezze sia più grande dell'altra, oppure che esse siano uguali. Tale relazione di uguaglianza è in realtà una relazione di equivalenza, in quanto le due grandezze che consideriamo uguali, non lo sono rispetto a tutte le loro caratteristiche, ma solo rispetto a una particolare, alla quale si sta rivolgendo la nostra attenzione. La matematica formalizza in modo molto preciso sia la relazione di equivalenza, sia l'ordine stretto che l'ordine largo[2], ma queste formalizzazioni non sarebbero nate se non ci fossero state le esperienze dirette di situazioni in cui queste relazioni sussistono e si possono davvero sperimentare. Sono esperienze che a scuola vanno in qualche modo enfatizzate.
In una classe di scuola elementare di Arona è stato chiesto ai bambini come si poteva misurare l'altezza della loro aula. Dopo varie proposte, i bambini si sono accordati in questo modo: uno di loro è salito su una scala, ha appoggiato il capo di uno spago vicino alla lampada al neon, in modo che esso combaciasse perfettamente al soffitto, un altro bambino ha tenuto il filo in modo che fosse teso e un altro l'ha tagliato lì dove combaciava con il pavimento. Poi hanno misurato lo spago ottenuto. Essi sapevano in modo intuitivo, cioè non formalizzato, ma chiaro, di trovarsi di fronte a due lunghezze uguali: la lunghezza del filo è esattamente uguale alla distanza tra il pavimento e il soffitto.
Più complesse sono le situazioni che successivamente si presentano in geometria. Quando affermiamo che due figure piane equiscomponibili hanno la stessa area, l'uguaglianza è chiaramente una relazione d'equivalenza. Proprio questa relazione è lo stru-

[1]A.N. Whitehead, *La Scienza e il mondo moderno*, Boringhieri, Torino 1979, pp. 48 - 49.
[2]Cfr.: G. Vergnaud, *Il bambino, la matematica, la realtà*, Armando, Roma 1994, pp. 41 - 42.

mento per calcolare l'area di una figura. Finché si tratta di poligoni, questo processo è attuabile con un numero finito di passi, ma quando si arriva al cerchio, i passi diventano infiniti.

Somma e prodotto

Occorre poi che si possa compiere un'operazione, interna all'insieme, che siamo soliti chiamare somma, la quale a due qualsiasi grandezze A e B della classe ne associa un'altra che, tradizionalmente, si indica con la notazione additiva A + B.
Ovviamente, come abbiamo già notato per il confronto, anche la somma è eseguita in modo diverso in ciascuno degli insiemi particolari in cui ci si pone, ed è collegata con le proprietà insiemistiche di quel certo insieme.
Per esempio, se pensiamo a un solido composto da un cilindro e da un cono appoggiato sopra ad esso, possiamo osservare questa situazione ponendoci dal punto di vista dei due oggetti concreti, e allora potremo parlare dell'oggetto complessivo come dell'unione dei due oggetti.
Ma se parliamo di volume o di superficie del corpo ottenuto, il punto di vista è più particolare: non guardiamo tutte le caratteristiche dell'oggetto, ma solo la sua forma ed una grandezza misurabile a essa collegata. Diremo allora, per esempio, che il volume del solido complessivo è la somma dei due volumi dei solidi che lo compongono.
Penso che sia compito della scuola produrre una chiarezza assoluta sulle azioni concrete e sulle modalità pratiche relative all'ordine e alla somma di grandezze, nei casi più comuni che si possono sperimentare.



Dalla somma discende direttamente la possibilità di definire il prodotto di un numero naturale per una grandezza: nA è la somma di n grandezze uguali ad A. Questa è un'operazione esterna, poiché associamo una grandezza a un elemento di tipo diverso, e cioè un numero naturale.
Se l'unione è reversibile, si potrà parlare anche di differenza di due grandezze: C - B = A, oppure C - A = B è vero se, e solo se, A + B = C. Nella descrizione del processo, possiamo sempre comunque immaginare questo tipo di operazione.
Occorre inoltre che sia possibile, almeno in linea di principio, dividere una grandezza in un certo numero di parti uguali, e questo conduce alla frazione, vista come rapporto di grandezze, oppure al prodotto di una grandezza per un numero razionale o reale (i passi, però sono molti, e vanno fatte altre precisazioni per dare senso al rapporto in ogni caso).
Un insieme di oggetti di questo tipo si chiama, per tradizione, «classe di grandezze omogenee».

Descrizione qualitativa del procedimento

I passi successivi del procedimento della misura sono costruiti applicando tutte le relazioni e operazioni precedentemente descritte. Essi possono essere elencati come segue, qualunque sia la classe di grandezze a cui ci si riferisce.
Si sceglie un oggetto **U** che si considera come campione e che viene chiamato «unità».
Si confronta l'oggetto **A** con **U** ottenendo:

A = k**U** (con k intero positivo)

oppure k**U** < **A** < (k + 1) **U**.

Nel primo caso:
si pone k = m (**A**), misura di **A** rispetto a **U**;
nel secondo caso:
si confronta nuovamente la grandezza **A** - k**U** con una parte di **U**.
Per esempio,
sia **U:** |----|
sia **A** il segmento OB: |----|----|----|----|----|--
confrontando **A** con **U** si ottiene:

O B' B
|----|----|----|----|----|--- B'B = **A** - 5 **U**

quindi: 5**U** < OB < 6**U**.
Si può scegliere una nuova unità **U'** = **U** / 10 (o altra parte di **U**) e confrontare B'B con essa.
Si verificherà nuovamente una delle due situazioni :

B'B = k' **U'** (con k' intero positivo)

oppure k'**U'** < B'B < (k' + 1) **U'**.

In questo secondo caso si procederà a confrontare il nuovo residuo con un sottomultiplo di **U'**.
Nel sistema decimale scriveremo, utilizzando la rappresentazione in base 10:

m(**A**) = k, k'...;

in altri sistemi avremo invece solo una notazione additiva:

A = k**U** + k' **U**/n ....

Discretizzazione del continuo

Si ottiene in questo modo un procedimento iterativo formato da passi successivi dello stesso tipo, attraverso il quale si determina il numero (misura) da associare alla grandezza **A** contando gli elementi di ordine di grandezza differenti che compongono l'oggetto misurato.
Se l'insieme su cui si sta procedendo è un insieme discreto, come un grosso sacco di chiodi, un'ingente quantità di caramelle, questo processo coincide qualitativamente con quello della rappre-

sentazione posizionale dei numeri. Contare gli elementi di un insieme, infatti, è la forma più elementare di misura.
Ma se si opera su un insieme continuo, è facile osservare che il procedimento descritto implica che si misurino le grandezze continue riconducendosi alla procedura valida per la misura di insiemi discreti (il contare). Possiamo indicare questo processo come una «discretizzazione» del continuo. Dice G. Vergnaud a questo proposito: «Questi esempi dimostrano che è riconducendosi al caso discreto che si misurano le grandezze continue, più esattamente inquadradole attraverso un sistema di grandezze discrete. Il sistema numerico decimale (o qualsiasi altro sistema con la virgola) traduce sul piano dei numeri la necessità di racchiudere le grandezze continue in un sistema di maglie sempre più fini senza fissare a priori dei limiti a questo affinamento.»[3]

Additività

Il procedimento sopra descritto è reso possibile da una caratteristica essenziale della misura di grandezze omogenee: ogni volta che si suddivide in parti una grandezza, la sua misura coincide con la somma delle misure delle sue parti. Questa proprietà è detta additività della misura. Possiamo formularla nel modo più generale per una coppia qualsiasi A e B di grandezze di una stessa classe (il simbolo di unione viene indicato con «$<$»):

$$m\,(A < B) = m\,(A) + m\,(B)$$

L'unica avvertenza da considerare è che le due grandezze abbiano intersezione nulla; in questo caso l'unione si dice «disgiunta», e si usa indicarla con un simbolo specifico: «$<_d$».
La formula precedente si può dunque riscrivere usando questo simbolo:

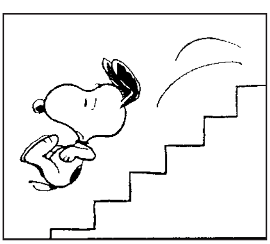
$$m\,(A <_d B) = m\,(A) + m\,(B)$$

Se usiamo invece la notazione additiva, scriveremo:

$$m\,(A + B) = m\,(A) + m\,(B)$$

dove però i due segni di somma hanno significati diversi: al primo membro si tratta della somma di due grandezze, al secondo membro si tratta della somma di due numeri positivi.

Avvertenze didattiche



Quando si confrontano, si ordinano e si sommano grandezze di uno stesso tipo, come lunghezze, distanze, superfici, volumi, capacità, pesi, eccetera, bisogna rispettare con precisione alcune regole dettate dalla natura degli oggetti su cui si opera.
Per questo, non basta che nella scuola elementare e media ci si limiti alla descrizione per sommi capi del processo della misura;

occorre invece che siano eseguite ripetutamente le azioni concrete che permettono di confrontare, ordinare e unire oggetti reali, e che poi siano descritte a parole (racconto) o con altri linguaggi (rappresentazioni di vario genere).

Facciamo alcuni esempi, per maggiore chiarezza.

Bisognerà scoprire che per ordinare bastoncini quasi uguali é essenziale appoggiare le basi a un righello, in modo da poter valutare differenze anche piccole.

Oppure che per confrontare le quantità di liquido contenute in due diversi recipienti, non si può tenere conto solo dell'altezza o della larghezza dei due recipienti: l'aspetto percettivo può trarre in inganno.

Analogamente, due oggetti possono avere lo stesso peso anche se i loro volumi sono molto differenti, come è evidente per 1 kg di ferro ed 1 kg di piume.

Le stesse considerazioni si possono fare se si confrontano due corde, una ben distesa e l'altra arrotolata: la percezione può falsare le nostre valutazioni qualitative. Così per ogni tipo di grandezza si deve giungere a specificare molto bene le regole operative per il confronto e per l'unione, e si deve ritenere un prerequisito essenziale la capacità di indagare sugli aspetti invarianti, al di là di possibili inganni della percezione.

Dal punto di vista didattico, ritengo molto importante che gli insegnanti ripensino a questa importante considerazione: non si ordinano solo i numeri, ma anche gli elementi di una stessa classe di grandezze. Proprio a partire dalle esperienze sulle grandezze acquista senso l'ordine sui numeri, e non viceversa. Il lavoro didattico sulla relazione d'ordine dei numeri, infatti, non consiste solo nel far accettare i simboli di > e <, ma anzitutto nel dare un senso al loro ordinamento. Imparare i simboli è solo l'aspetto linguistico della faccenda. L'ordine, poi, va compreso non solo sulla serie dei numeri, ma anche in relazione alle operazioni. Infatti è una convinzione errata molto tenace quella che il prodotto di due numeri positivi sia sempre maggiore dei due fattori del prodotto. È una proprietà del prodotto tra due numeri naturali, che non vale più nel campo dei razionali.

Basta pensare a un esempio banale: $10 \cdot x = 5$, dove è $5 < 10$. Analogamente per la divisione: $10 : x = 20$, dove è $20 > 10$, contrariamente a quanto avviene tra numeri naturali.

È bene sottolineare ancora una volta che é proprio l'attività di confrontare, ordinare e sommare grandezze fisiche che costruisce con gradualità la comprensione delle proprietà degli insiemi numerici, e non viceversa. Infatti, la struttura algebrica degli insiemi numerici può essere ben compresa e appresa attraverso l'impatto con la struttura della misura su classi di grandezze, proprio perché le due strutture sono isomorfe.

[3] G. Vergnaud, *op. cit.*, p. 116.

Allora possiamo perfettamente concordare con questa affermazione: «Nella costruzione della matematica a partire dalle azioni e dalle nozioni quotidiane, gli oggetti e le grandezze sono il primo gradino di una scala che ne comporta tre, con livelli di astrazione crescente. Il secondo gradino è quello delle misure e dei numeri. Il terzo è quello della sostituzione dei numeri con variabili algebriche.»[4]
Ma torniamo al punto che stavamo considerando. Cosa significa sommare due segmenti? oppure sommare due capacità? Nelle attività concrete sarà opportuno sostituire il termine «somma» con altri di uso più quotidiano che meglio caratterizzano ogni volta la manipolazione. Per esempio: aggiungere il contenuto di un recipiente in un altro; giustapporre due rettangoli per formare una superficie più grande, mettere due aste in fila una dopo l'altra, eccetera.
Dopo un lavoro di questo tipo sulle azioni e sul linguaggio, tutta la varietà di termini utilizzati si riassume bene nella parola «somma», che acquista un significato molto generale, senza alcuna possibilità di confusione con la somma di numeri. Attraverso la riflessione linguistica sui termini, si avvia a riconoscere la distinzione tra una struttura (elenco generale di operazioni, corredato dall'elenco di tutte le proprietà verificate, prscindendo dal significato oggettivo degli elementi dell'insieme) e gli esempi concreti dotati di quella struttura.[5]
Se si acquista questa mentalità, non dovrebbe meravigliare il fatto di scoprire che quando si parla di somma di angoli, l'operazione è intesa in modo molto particolare, non completamente identico ai casi delle grandezze considerate precedentemente.
Tra gli angoli, infatti, si può definire una somma solo «a meno di multipli di 2π», come chiarisce il seguente esempio:
$7/6\pi + 8/6\pi = 15/6\pi = 12/6\pi + 3/6\pi = 2\pi + \pi/2$
da cui si deduce:
$7/6\pi + 8/6\pi = \pi/2$ (modulo 2π)
L'attenzione alla struttura porterà la domanda, invece che sul modo di definire la somma, sulle proprietà di cui essa è dotata.

Quante volte si può ripetere il procedimento?

Il procedimento iterativo, descritto precedentemente per misurare una grandezza A, può essere considerato da due diversi punti di vista.
Dal punto di vista dell'esperienza esso ha certamente termine, o perché non esiste un residuo o perché non è più significativo procedere.
Dal punto di vista teorico, invece, può non avere termine: il primo è il punto di vista della fisica, il secondo della matematica.
Se si tronca il procedimento quando non lo si ritiene più significa-

tivo, si può esprimere il rapporto tra **A** e il campione **U** con un numero razionale (le cifre decimali sono in numero finito).
Dal punto di vista matematico, se il procedimento non ha termine, la misura (rapporto) si esprime con un numero reale (è un numero non periodico, ma le cifre dopo la virgola non hanno termine.
In questo modo, la matematica descrive il processo operativo senza interessarsi delle caratteristiche dello strumento o di altri vincoli reali. È la sensibilità dello strumento di misura e la possibilità di eseguire materialmente il procedimento che impongono un termine reale al processo, che invece può essere identificato con un processo senza termine, se ci limitiamo ad immaginarlo o descriverlo solo nella sua caratteristica di azione ripetibile.
Dal punto di vista matematico, questa è un'ipotesi molto sensata, cioè coerente con la natura degli enti matematici. È ben noto che se si prende come unità di misura il lato di un quadrato, la sua diagonale si trova proprio in questa situazione. La sua misura è espressa dal numero irrazionale $\sqrt{2}$ e i due segmenti si dicono incommensurabili, in quanto uno non si può misurare esattamente rispetto all'altro. La stessa cosa accadrebbe se si prendesse come unità la diagonale del quadrato: in questo caso sarebbe il lato a risultare incommensurabile rispetto alla diagonale.

L'incertezza della misura

Le misure reali non possono avere una precisione assoluta. Si parla in genere di una incertezza intrinseca all'operazione stessa di misura, e ciò significa che il numero con cui si esprime la misura è sempre dato all'interno di un certo intervallo di validità, che dipende dallo strumento e dal modo in cui la misurazione viene eseguita. Spostare un righello, tenere un filo non ben teso, far travasare un po' di liquido, sono inconvenienti che possono alterare la misura, ma non si può tuttavia parlare di autentici sbagli. Bisogna decidere se il risultato trovato, o meglio i risultati trovati con diverse misurazioni, siano (o non siano) adeguati allo scopo, ed eventualmente decidere come dedurre da molte misurazioni vicine, ma non identiche, un valore da privilegiare.
L'incertezza della misura non va confusa con l'idea psicologica di incertezza, cioè non è assolutamente da intendersi come una «mancanza di certezza». Essa si riferisce invece al fatto che si possono dare approssimazioni successive di una stessa misura, purché si abbia un criterio per decidere quale tipo di approssimazione sia significativa. È una domanda che può avere risposta solo da fattori che riguardano la sensibilità degli strumenti e il contesto in cui la misura avviene. Moltissime delle nostre conoscenze, anche in campi non scientifici, ma più legati al livello esistenziale, avvengono per approssimazioni successive. Un artista

[4] L. Grugnetti, V. Villani (a cura di), *La matematica dalla scuola materna alla maturità,* Pitagora, Bologna 1999, p. 55.
[5] Cfr.: F. Speranza, *Relazioni e struttura*, Zanichelli, Bologna 1970.

continua a ritoccare la sua opera finché non la ritiene adeguata alle sue aspettative, ma può anche riprendere lo stesso soggetto più volte, tentando risultati espressivi sempre migliori. Per poter dire di conoscere un amico, non basta aver passato insieme qualche bella serata. Anche in questo caso (pur trattandosi di una questione esistenziale, e dunque legata a un metodo di conoscenza diverso da quello scientifico) la conoscenza avviene per approssimazioni successive.
Il punto cruciale è decidere quale sia il livello di approssimazione che possa bastare, in relazione allo scopo che ci si prefigge. Facciamo alcuni esempi.
Se si misura il peso di un neonato, anche i grammi sono importanti per giudicare il suo stato di salute, mentre se si misura il peso di un uomo adulto e robusto, i grammi non sono più così importanti. In corrispondenza a questo, la bilancia che si usa per un neonato è molto più sensibile di quella che si usa per gli adulti, e ciò ha delle implicazioni sul rilevamento dei dati. Se si misura il tempo impiegato da due concorrenti in una gara, ed essi appaiono a chi li guarda ad occhio nudo tagliare il traguardo contemporaneamente, si dovrà ricorrere ad uno strumento di misura molto più sensibile di un comune orologio da polso, per decidere se sono a pari merito o se uno dei due è il vincitore.
Ecco un'altra connotazione della misura che va ben compresa da subito, o almeno molto presto, attraverso esperienze didattiche seguite da discussioni ben guidate dall'insegnante. La professoressa Rinaudo, nel testo citato in bibliografia, ne propone alcune davvero molto semplici, come, per esempio, misurare la cattedra tabulando i vari risultati ottenuti da diversi allievi e cercando poi il valore più probabile. Sono proposte per la scuola media, che si possono adattare facilmente alla scuola elementare, e anche ai primi anni di scuola superiore.

**Docente di Analisi matematica*
Politecnico di Torino

INDICAZIONI BIBLIOGRAFICHE

L. Grugnetti, V. Villani (a cura di), *La matematica dalla scuola materna alla maturità*, Pitagora, Bologna 1999 (ed. orig. 1995, ricerca del *Centre de Recherche sur l'Einseignement des Mathematiques*, Nivelles, Belgio).
G.H. Hardy, *Apologia di un matematico*, De Donato, Bari 1969 (ed. orig. 1967).
G. Rinaudo, F .Pisani, *La natura delle cose*, vol 1, Loescher, Torino 1983.
F. Speranza, *Relazioni e struttura*, Zanichelli, Bologna 1970.
G. Vergnaud, *Il bambino, la matematica, la realtà*, Armando, Roma 1994 (ed. orig.1981).
A.N. Whitehead, *La scienza e il mondo moderno*, Boringhieri, Torino, 1979.