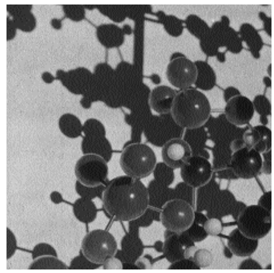
IL TEOREMA DI PITAGORA

UN ITINERARIO DIDATTICO

*di Adriana Davoli**

Dal bagaglio esperienziale dell'allievo, dal suo buon senso al linguaggio formalizzato: un percorso che sfida i luoghi comuni sull'insegnamento della matematica. In questo articolo si presentano, come esempio, alcune linee guida per introdurre il teorema di Pitagora.

Attraverso l'insegnamento della matematica si può contribuire alla formazione della persona, purché si scelga un metodo adeguato che non presenti la materia innanzi tutto come un insieme di informazioni, di indicazioni, di prescrizioni e di spiegazioni, ma come una disciplina che si apprende soprattutto attraverso le domande che sorgono nel discente, che dominano il suo orizzontale e che conducono l'allievo a muoversi per cercare delle risposte in modo razionale.
Perciò un lungo percorso, da iniziare il primo giorno di scuola in prima media, costituirà la necessaria premessa al teorema di Pitagora; infatti molte sono le informazioni, le esperienze e il linguaggio ad esse connesse, che concorrono alla preparazione di una efficace introduzione di questo celebre teorema.
L'approccio che proponiamo è teso a valorizzare ciò che l'alunno sa e sa fare, cioè la sua esperienza e il suo buon senso. Afferma Freudenthal[1] che la matematica nasce dal buon senso comune sia nella storia, che nella mente di ciascuno; e inoltre afferma che essa resta sempre agganciata al buon senso, perfino quando l'astrazione e il formalismo sembrano distaccarsene, poiché il contesto in cui si muove chi fa matematica è la realtà (non il libro di testo, il quale raccoglie esercizi codificati, avulsi dall'interesse vero degli allievi). Dunque è la capacità razionale, proprio quella che viene usata normalmente nella vita quotidiana, che viene messa in moto.



[1]H. Freudenthal, *Ripensando l'educazione matematica,* (a cura di C.F. Manara) La Scuola, Brescia 1994.

Partire dall'esperienza dell'alunno

Analizzeremo l'enunciato del teorema di Pitagora per trovare quali situazioni, costruzioni e domande un alunno deve avere già incontrato nella sua carriera scolastica, affinché conoscenze e linguaggio appropriato gli consentano di passare dall'intuizione a un

livello di astrazione più alto, in cui si giochi la sua razionalità.
In un periodo di tempo adeguatamente lungo, condurremo gli allievi ad affrontare una molteplicità di situazioni, a discuterne, a cercare di vedere le cose in modi non usuali, a smontare e ricostruire figure. Piano, piano arriveranno con naturalezza a intuire la sostanza del problema che si vuole affrontare, a capire quali sono le domande in gioco, ad apprendere il lessico che consente di parlarne e a sentire come esigenza personale la necessità di trovare risposte.
Possiamo trovare una analogia a questo modo di procedere nell'ambito di un romanzo giallo in cui il lettore, per poter collegare gli indizi durante l'indagine, ha bisogno di un preambolo che crei l'atmosfera, di un antefatto che gli consenta di capire le situazioni e gli elementi in gioco. Per ottenere un risultato simile nel nostro campo, ci aggánceremo all'esperienza personale degli alunni e cercheremo di attivare e di favorire la loro capacità progettuale. A questo scopo, da un lato provvederemo ad arricchire il bagaglio delle loro esperienze, dall'altro li porremo davanti a situazioni problematiche costituite dalla necessità di inventare razionalmente dei modi di costruire figure geometriche assegnate.

Costruzione di un ambiente di apprendimento

Esaminiamo passo passo le parole, i concetti e le costruzioni dell'enunciato del teorema:
IN UN TRIANGOLO RETTANGOLO, IL QUADRATO COSTRUITO SULL'IPOTENUSA È EQUIVALENTE ALLA SOMMA DEI QUADRATI COSTRUITI SUI CATETI.
Cominciamo a considerare una ad una le questioni che è bene affrontare a partire dalla prima classe, per preparare un passaggio più sicuro e consapevole al nuovo livello concettuale.
In questa fase ci muoviamo in ambito strettamente geometrico, senza introdurre i numeri come misure delle grandezze coinvolte, sfruttando solo la possibilità di verificare attraverso operazioni manuali le proprietà degli enti e le relazioni tra di essi.

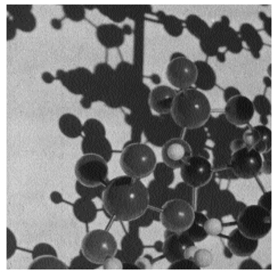
Angolo retto

Molti alunni, più di quanti non si creda, hanno idee confuse riguardo al concetto di ANGOLO. Per esempio, a volte non riescono a confrontare l'ampiezza di due differenti angoli; oppure non riconoscono ANGOLI RETTI nell'ambiente che li circonda; oppure non sanno riprodurre in pianta il perimetro della stanza in cui si trovano, poiché tracciano i segmenti (corrispondenti ai lati della stanza) uno dietro l'altro sulla stessa retta, senza tenere conto degli angoli compresi nella realtà tra l'uno e l'altro.

Triangolo rettangolo

Altro aspetto di cui difficilmente si accorgono gli adulti, riguarda una difficoltà lessicale. Essa si manifesta subdolamente con vari tipi di errore, benché apparentemente non sembrino a essa collegati. Invece, mancando di adeguata consuetudine a utilizzare certe parole tecniche, alcuni alunni non mantengono l'attenzione sufficientemente vigile, o per superficialità o per fretta. Per questo frequentemente essi confondono il significato di termini che a loro possono sembrare simili, quali per esempio: RETTANGOLO e TRIANGOLO RETTANGOLO. In questi casi è necessario rinforzare l'attenzione tramite un uso consapevole di questi termini.

Dato un triangolo rettangolo è necessario che i ragazzi sappiano localizzare l'angolo retto, qualunque sia la disposizione della figura sul foglio. Infine è necessario che l'allievo abbia già appreso e ben memorizzato la nomenclatura con cui vengono indicati i lati: ipotenusa e cateti.



Perpendicolare

La costruzione di un segmento di PERPENDICOLARE a un segmento dato verrà presentata in forma problematica, in modo che l'alunno sia indotto a impegnare la sua fantasia, le sue conoscenze e tutte le sue risorse. Il segmento di partenza verrà poi disposto in varie e disparate posizioni rispetto al bordo del foglio (meglio su di un foglio bianco).

Questo punto ha due aspetti: uno linguistico (l'apprendimento del significato del termine «perpendicolare a... »), l'altro riguardante la capacità progettuale in una costruzione. Intendo dire che non si dovrebbe insegnare «come si fa», ma si dovrebbe chiedere di «pensare come si può fare».

Quadrato

Si passa poi a consolidare la conoscenza consapevole del concetto di QUADRATO, attraverso un confronto dei lati e degli angoli tra loro. Pian piano si fa emergere l'esplicitazione delle relazioni tra gli elementi, fino ad arrivare a una definizione accettabile.

Costruzione di un quadrato su di un segmento dato

Quando sia stato trovato un modo per costruire un segmento di perpendicolare a un segmento dato, si può utilizzare questa capacità in una molteplicità di costruzioni. Per esempio, seguendo letteralmente la definizione di «quadrato», ci si può chiedere come lo si possa costruire su di un foglio bianco.

Si comincerà a tracciare un segmento disposto in modo qualunque rispetto al bordo del foglio. Poi verrà posto il quesito: «come si può costruire un quadrato su questo segmento?». Un altro modo equivalente di presentare il problema può essere il seguente: «Come si fa a costruire un quadrato avente lato lungo come questo segmento?»

In questa fase sono accettate tutte le vie, per poterle analizzare approfonditamente.
Fino a questo punto sono stati dati gli elementi lessicali e costruttivi per comprendere l'espressione:
IN UN TRIANGOLO RETTANGOLO, IL QUADRATO COSTRUITO SULL'IPOTENUSA ...

Concetti riguardanti le grandezze non lineari

Attraverso la manipolazione di figure geometriche, si introducono i concetti di EQUIVALENZA e di SOMMA.

È equivalente a...
A proposito del concetto di EQUIVALENZA tra poligoni di forme differenti, anche qui si apre un rilievo concettuale e uno linguistico.
Possiamo affrontare la questione in vari modi, soprattutto utilizzando attività manipolative che consentano di sfruttare l'intuizione dei ragazzi. Per esempio, nella letteratura didattica, molte sono le proposte che si trovano su questo tema; come la scomposizione di poligoni equivalenti in un numero finito di parti sovrapponibili; come l'utilizzo del *Tangram*, o di altri mezzi analoghi.
Si giunge così a dare senso, attraverso varie esperienze, all'espressione:
IN UN TRIANGOLO RETTANGOLO, IL QUADRATO COSTRUITO SULL'IPOTENUSA È EQUIVALENTE ...

Somma di figure
Ora si tratta di dare senso all'operazione di somma tra grandezze, quali ad esempio le superfici. Daremo il nome di «somma di due poligoni», al nuovo poligono che si può ottenere in vari modi accostando opportunamente con trasporto rigido due qualsiasi lati dei due poligoni dati, fino a farli coincidere in tutto o in parte Otteniamo un nuovo poligono concavo o convesso la cui superficie ha una estensione uguale all'insieme dei due poligoni iniziali.
Utilizzando per esempio fogli di differente colore, si possono ottenere in vari modi poligoni somma di quelli dati e ci si può convincere che sono tutti equivalenti indipendentemente dalla forma.

Ma sarà proprio vero?
Questi artifici accendono l'intuizione dei ragazzi, i quali vedono con i propri occhi che sempre gli stessi pezzi ricoprono integralmente ora una figura, ora un'altra. Ma li metteremo in guardia verso un atteggiamento superficiale con il quale si accetta come prova inconfutabile il fatto di «aver visto» o di «aver realizzato concretamente una figura».
A questo scopo è molto utile presentare il classico esempio di Lewis Caroll, nel quale un quadrato avente lato di 8 quadretti, viene opportu-

namente tagliato in quattro pezzi (figura 1),

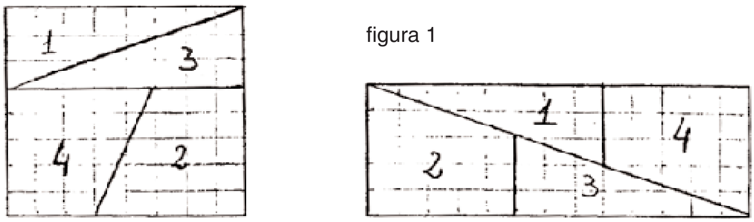
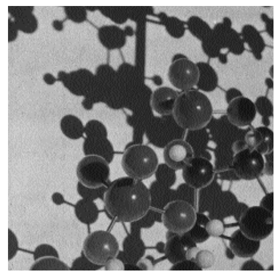


figura 1

in modo da ricomporre con essi un rettangolo avente 13 quadretti su un lato e 5 sull'altro. Apparentemente il rettangolo e il quadrato (ottenuto tagliando e incollando) sono equivalenti. In realtà il quadrato ha un'area di 8x8=64 quadretti, mentre il rettangolo è di 13x5=65 quadretti. Come è possibile che 64=65?



La soluzione del mistero si ottiene aumentando la precisione con cui si divide il quadrato, in modo da poter ricomporre la nuova figura con maggior accuratezza. Così facendo si mette in evidenza (figura 2) che i poligoni 1, 2, 3, 4 non ricoprono perfettamente tutto il rettangolo, ma lasciano una fessura attorno alla diagonale AB, corrispondente al quadrilatero: ADBC.

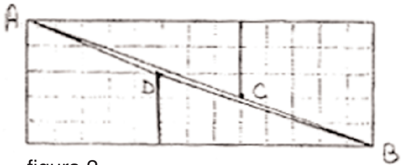


figura 2

Si può lanciare una sfida ai ragazzi: «Nel passare dal quadrato al rettangolo, nella nuova figura si è insinuato un quadretto. Dove si è nascosto?» Gli allievi dovranno trovare il quadrilatero stiracchiato equivalente al quadratino.

A questo punto abbiamo concluso un primo itinerario che consente di dare significato alla proposizione:

IN UN TRIANGOLO RETTANGOLO IL QUADRATO COSTRUITO SULL'IPOTENUSA È EQUIVALENTE ALLA SOMMA DEI QUADRATI COSTRUITI SUI CATETI.

Si badi bene però che questo enunciato verrà presentato come ultima tappa dell'ultimo atto di questo lungo percorso.

Verifica e dimostrazione

Abbiamo creato un ambiente didatticamente ricco, in grado di favorire un apprendimento naturale di un linguaggio tecnico utile per indicare concetti, relazioni o elementi delle figure considerate. In questo contesto già si è presentata la necessità di «inventare» sistemi per disegnare o per costruire figure rispondenti a richieste particolari. Questo percorso didattico costituisce un esempio di itinerario che tende a valorizzare il «buon senso comune» dell'alunno, mettendo in movimento la sua progettualità.

Procedendo, dobbiamo ancora vedere come si passa da questo buon senso alla matematica con le sue dimostrazioni e il suo linguaggio. Già siamo a buon punto, poiché abbiamo indotto gli allievi a non credere acriticamante all'apparenza, e a far loro provare l'esigenza di intraprendere una via per giungere alla certezza senza trabocchetti nascosti. In particolare nel nostro caso, occorre convincere che è possibile arrivare alla certezza dell'equivalenza di due figure di forma differente; dapprima attraverso una VERIFICA, valida per il singolo caso in esame e con valore intuitivo; poi tramite una DIMOSTRAZIONE, con valore di prova inconfutabile.
A questo scopo si può seguire un percorso già suggerito nel 1741 da Clairaut, matematico francese. Egli pensava che il metodo classico di presentare la geometria fosse troppo arido per i principianti, poiché «si inizia sempre con una gran quantità di definizioni, di assiomi, di principi preliminari, che fanno presumere al lettore che si tratti di un contenuto arido. Poi le proposizioni che seguono, non richiamando l'attenzione su oggetti interessanti, ed essendo difficili concettualmente, provocano stanchezza e scoraggiamento, prima che il discente abbia completato un'idea adeguata su ciò che doveva apprendere.»[2]
Perciò il nostro autore, superando l'atteggiamento classico dei greci, e ispirandosi alle origini della geometria, ha pensato di cercare qualcuna delle necessità che verosimilmente possono aver fatto fare i primi passi, i quali perciò non possono essere fuori della portata dei principianti.
Ecco come in lui è sorta l'idea di non presentare le proposizioni come teoremi, ma di fare un percorso da cui sia possibile comprendere come si è pervenuti alla loro scoperta; inoltre si spera di ottenere un'utilità ancora più importante, cioè quella di abituare lo spirito alla ricerca ed alla scoperta: «Mi è sembrato molto più appropriato occupare continuamente il discente nella risoluzione di problemi; cioè cercare il modo per fare delle operazioni, o di scoprire qualche verità sconosciuta, determinando i rapporti tra le grandezze date e quelle incognite, che ci si propone di trovare. Seguendo questo percorso, i principianti, a ogni passo che vien loro fatto fare, scoprono il movente che determina le azioni dell'inventore; e da qui essi possono acquisire più facilmente lo spirito di invenzione.»[2]
Non si potrebbe meglio giustificare questo approccio. Ecco dunque la proposta di Clairaut.

Duplicazione di un quadrato

Per guidare l'alunno a inventare qualche sistema per costruire un quadrato equivalente alla somma di due quadrati uguali, è opportuno predisporre alcune esperienze il cui ricordo può essere utile. Per esempio:
- si osserva che è sempre possibile scomporre un generico poligono in un numero finito di triangoli.

- in particolare, si esamina la scomposizione di un rettangolo in due triangoli rettangoli, aventi la stessa base e la stessa altezza. Tagliando il rettangolo e ricomponendolo in modo opportuno si verifica che i due triangoli sono congruenti.
A questo punto si considerano due quadrati uguali e si chiede di costruire un nuovo quadrato somma dei primi due (figura 3).

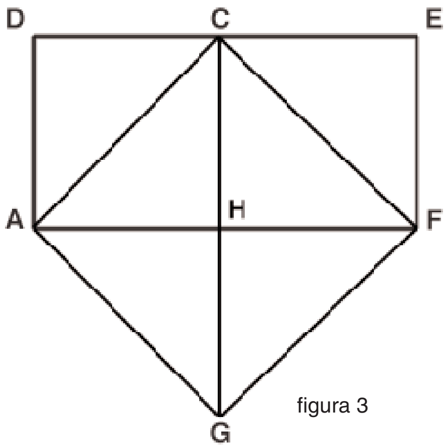
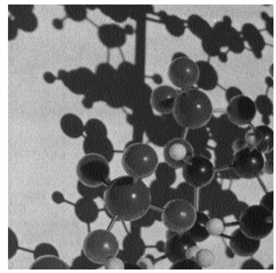


figura 3

In altri termini possiamo chiedere di risolvere il problema della duplicazione di un quadrato.
Questa via può essere utile per «vedere» le varie parti delle figure «muoversi», «scomporsi e ricomporsi». Dopo aver avvicinato i due quadrati, in entrambi si traccia in modo opportuno una diagonale; poi pensando i punti A ed F come perni, si possono ruotare i triangoli: ACD - attorno ad A, e FCE - attorno ad F, fino ad ottenere il nuovo quadrato ACFO.



[2]A.C. Clairaut, *Eléments de géometrie* (1741), Gauthier-Villars, Paris 1929.
[3]A.C. Clairaut, *Idem.*

Costruzione di un quadrato somma di due quadrati qualunque

Si passa a una generalizzazione del caso precedente;
si chiede di:
COSTRUIRE UN QUADRATO EQUIVALENTE AD ALTRI DUE, QUANDO QUESTI ULTIMI NON SIANO CONGRUENTI (figura 4).

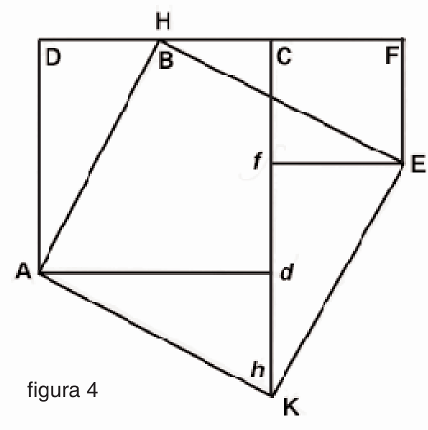


figura 4

Guardando la figura, si può vedere che il nuovo quadrato si ottiene cercando un punto H sul segmento DF, che abbia la stessa funzione del punto C, nel caso precedente (figura 3). Tracciati i segmenti HE e HA, si possono pensare i punti A ed E come perni e ruotare i triangoli: AHD - attorno ad A, EHF - attorno ad E, fino ad ottenere il nuovo quadrato AHEK.
Fino a questo punto abbiamo concentrato la nostra attenzione sulla scomposizione di una strana figura, ottenuta dalla SOMMA DI DUE QUADRATI, e sulla ricomposizione delle parti, utilizzando tutti i pezzi, fino ad ottenere UN NUOVO QUADRATO.

Attenzione! Se si vuole superare l'aspetto intuitivo, è necessario dimostrare:
- che i triangoli nella nuova posizione sono effettivamente congruenti a quelli che si trovavano nella vecchia posizione prima della rotazione;
- che il nuovo quadrilatero ha tutti i lati congruenti e perpendicolari tra loro.

Non siamo ancora giunti all'enunciato del teorema di Pitagora, ma abbiamo predisposto tutto.

L'enunciato del teorema di Pitagora

L'enunciato a cui vogliamo arrivare riguarda una relazione quadratica tra i lati di un triangolo rettangolo; oppure si può dire anche che riguarda una relazione lineare tra i quadrati costruiti sui lati. Questo fatto non è intuitivo come la costruzione precedente, ma ci possiamo arrivare facendo alcune considerazioni sulla figura 4.

Innanzi tutto notiamo che i due quadrati, per il modo in cui è stato scelto il punto H (tale che DH=CF=EF), sono costruiti uno sul cateto maggiore l'altro su un lato congruente al cateto minore del triangolo ADH.

Inoltre possiamo riconoscere che il quadrato ottenuto (equivalente alla somma degli altri due) è costruito sull'ipotenusa del triangolo rettangolo ADH. Siamo così arrivati alla fine alla dimostrazione della famosa proprietà dei triangoli rettangoli, che si enuncia con il teorema di Pitagora.

Conclusione

Abbiamo voluto fornire un esempio di percorso didattico, nel quale agli alunni non è lasciato tutto lo sforzo di trovare un aggancio tra il proprio buon senso e la lezione frontale, di trovare un legame tra la propria esperienza e un contenuto spesso sentito come distante da essa. Facilmente gli studenti lasciati soli vanno incontro a grossi insuccessi, mentre opportunamente aiutati possono appassionarsi, trovare gusto e maturare un interesse più profondo per la ricerca e la scoperta razionale.

Un aspetto delicato sta nella distinzione tra «verifica» e «dimostrazione». Per questo il cammino proposto, che si distende per la lunghezza di quasi due anni, vuole approdare non solo all'apprendimento del famoso teorema, ma tende anche a far capire la necessità della dimostrazione.

** Docente di Matematica*
Milano